Министерство образования и науки Российской Федерации
Балтийский государственный технический университет «Военмех»

Б.П. РОДИН

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2017

УДК 517.97(075.8)
Р60

Родин, Б.П.

Р60 Вариационное исчисление: учебное пособие / Б.П. Родин; Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2017. – 60 с.

Данное пособие соответствует программе одноименного курса, читаемого магистрам БГТУ. В нем отобран материал из классических учебников, который по содержанию, стилю изложения и объему может быть усвоен за один семестр студентом, прослушавшим стандартный курс математики в бакалавриате технического вуза.

УДК 517.97(075.8)

Р е ц е н з е н т канд. техн. наук *В.Ю. Емельянов*

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета

1. Интегральный функционал

Интегральный функционал, его дифференциал, или вариация, его стационарная точка и точка экстремума суть исходные понятия вариационного исчисления.

Простейший *интегральный функционал* представляет собой отображение вида

$$J(y) = \int_a^b F\big(x, y(x), y'(x)\big)dx,$$

где $F(x, y, z)$ – заданная на множестве $Q = \{(x, y, z): x \in [a, b], y, z \in R\}$ функция, ее выбор и определяет интегральный функционал. Аргументом функционала J является функция $y \in [a, b] \to R$, а значения – вещественные числа. В приложениях функция F нередко бывает задана лишь на некотором подмножестве множества Q.

Термин «функционал» обычно применяется для наименования отображений, принимающих, так же как и функции, числовые значения. В вариационном исчислении его применяют потому, что термин функция занят для обозначения аргументов функционала.

Множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций будет обозначаться $C(a, b)$, а подмножество этого множества, образованное непрерывно дифференцируемыми функциями – $C^1(a, b)$. Множество D функций, на которых определен интегральный функционал J, называется *областью определения функционала*. Если предположить, что $F(x,y,z)$ непрерывна по совокупности переменных всюду на $Q = \{(x, y, z): x \in [a, b], y, z \in R\}$, то в качестве области определения D можно взять множество $C^1(a, b)$. В таком случае говорят, что J – интегральный функционал на множестве $C^1(a, b)$. Поскольку функция $F(x, y(x), y'(x))$, где $y \in C^1(a, b)$, есть непрерывная функция на $[a, b]$, интеграл $J(y)$ определен как интеграл по промежутку $[a, b]$ от непрерывной функции.

Развитее вариационного исчисления началось с отыскания точек минимума и максимума интегрального функционала J (собирательно – точек экстремума), т.е. таких функций $y \in D$, на которых функционал принимает наименьшее или наибольшее значения.

Пусть $F(x, y, z) = q(x)y + p(x)z'$, где $q \in C(a, b)$, $p \in C(a, b)$ – заданные функции. Тогда функционал

$$J(y) = \int_a^b \big(q(x)y(x) + p(x)y'(x)\big)dx.$$

Этот функционал обладает свойством линейности:

$$J(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha J(y_1) + \beta J(y_2),$$

здесь $\alpha, \beta \in R$, $y_1, y_2 \in C^1(a, b)$. В силу свойства линейности эти функционалы не имеют наименьшего и наибольшего значений. Для типичных интегральных функционалов вариационного исчисления характерна нелинейность по второму и третьему аргументам. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть $F(x, y, z) = y$, тогда $J(y) = \int_a^b y(x)dx$. Этот линейный функционал носит название определенного интеграла от функции y по промежутку $[a, b]$. В силу линейности он не имеет экстремальных точек.

Пример 2. Пусть $F(x, y, z) = (1 + z^2)^{1/2}$, тогда

$$J(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}dx.$$

Значение этого функционала $J(y)$ на функции $y \in C^1(a, b)$ есть длина графика этой функции. Наименьшее значение этого функционала достигается на любой постоянной функции и равно $b - a$.

Выделим из множества $C^1(a, b)$ подмножество функций, граничные точки графиков которых заданы равенствами $y(a) = A$, $y(b) = B$, и ограничим функционал на это подмножество. Он будет иметь на нем наименьшее значение, равное расстоянию между точками (a, A) и (b, B) на плоскости R^2. Это значение реализуется на функции

$$y(x) = A + (B - A)\frac{x-a}{b-a}.$$

2. Простейший тип задач вариационного исчисления

Познакомимся вначале с двумя простыми, но важными задачами вариационного исчисления [1]. Первая известна как задача о брахистохроне, предложенная в 1696 г. Иоганном Бернулли и сыгравшая большую роль в развитии вариационного исчисления. Она привела к появлению ряда подобных задач и создала основу для их систематизации и развития общих методов исследования. Эти исследования связаны прежде всего с именами Эйлера и Лагранжа, предложившими общие методы.

Наряду с задачей о брахистохроне будет рассмотрена задача о минимизации площади поверхности вращения, а затем описан простейший тип задач вариационного исчисления, включающий обе рассмотренные задачи. Отметим: хотя область применения вариационного исчисления чрезвычайно обширна, приведенные примеры показывают, что наиболее важные задачи носят геометрический или физический характер.

2.1. Задача о брахистохроне

Пусть даны две точки, расположенные на разной высоте и не лежащие на одной вертикальной прямой. Проведем через данные точки вертикальную плоскость и рассмотрим кривые, соединяющие эти точки и расположенные в данной плоскости. Из этих кривых выберем такие, что материальная точка массы m, выходящая из верхней точки P_1 со скоростью $v_1 > 0$, двигаясь только под действием силы тяжести по кривой, достигнет точки P_2.

Задача о брахистохроне формулируется следующим образом:

1) существует ли среди этих кривых такая, которую точка пробегает за минимальное время?

2) если такая кривая существует, то как ее найти?

Сформулированная проблема приводит к исследованию экстремума некоторого функционала.

Выберем в вертикальной плоскости, определенной двумя данными точками, прямоугольную систему координат так, чтобы точка P_1 совпала с началом координат, а ось Oy направим вертикально вниз. Пусть точка P_2 имеет координаты (b, B). На первом шаге для простоты предположим, что рассматриваются только такие кривые, которые являются графиками функций y, где $y \in C^1(0, b)$.

Итак, выберем такую функцию y, которая удовлетворяет граничному условию

$$y(0) = 0, \;\; y(b) = B. \tag{2.1}$$

В таком случае время $T = T[y]$, необходимое материальной точке для движения вдоль кривой, которая является графиком функции $y = y(x)$ $(x \in [0, b])$, выражается формулой

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)+\alpha}} dx, \tag{2.2}$$

где $\alpha = \frac{v_1^2}{2g}$. Для получения этой формулы введем следующие обозначения: x – абсцисса движущейся точки $(x \in [0, b])$; t – время, прошедшее с момента начала движения $(t \in [0, T])$; s – длина пути, пройденного движущейся точкой $(s \in [0, S])$; v – скорость движущейся точки. Так как точка движется под действием силы тяжести вдоль кривой $y = y(x)$ $(x \in [0, b])$, то каждая из величин x, t, s связана с положением точки взаимно однозначным соответствием. Следовательно, каждая из этих величин является монотонно возрастающей функцией любой из остальных величин. Ясно, что $v = \frac{ds}{dt}$. Будем исходить из закона сохранения энергии:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v^2(t) - mgy\big(x(t)\big) \quad (t \in [0, T]),$$

откуда с помощью простых преобразований получаем, что функция $s \in C_1[0, T]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g}\sqrt{y(x(s) + \alpha} \;\; \left(\alpha = \frac{v_1^2}{2g}\right) \tag{2.3}$$

с начальным условием $s(0) = 0$. Разделяя переменные в (2.3) и интегрируя, получаем равенство

$$T = \int_0^T dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^S \frac{ds}{\sqrt{y\big(x(s)\big)+\alpha}} \,. \tag{2.4}$$

В интеграле, стоящем в правой части (2.4), применим подстановку:

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(\xi)}\, d\xi.$$

В результате для искомого значения времени $T = T[y]$ получим выражение (2.2).

Из сказанного ясно, что задача о брахистохроне сводится к нахождению минимума функционала, описываемого следующими условиями:

1) *класс допустимых функций* состоит из тех функций $y \in$ $\in C^1[0, b]$, которые удовлетворяют неравенству $y > -\alpha$ и условию (2.1);

2) формула (2.2) задает *правило*, которое каждой допустимой функции y ставит в соответствие действительное число, т.е. интегральный функционал.

2.2. Задача о минимальной поверхности вращения

Рассмотрим на плоскости прямую l и фиксируем две точки: P_1 и P_2, лежащие в данной плоскости по одну сторону от прямой l так, что прямая, проходящая через точки P_1 и P_2, не является перпендикулярной к l. Соединим точки P_1 и P_2 всевозможными гладкими кривыми, лежащими в данной плоскости. Вращая каждую такую кривую вокруг l, получаем поверхность, называемую *поверхностью вращения*.

Задача о минимальной поверхности вращения формулируется следующим образом:

1) существует ли среди этих кривых такая, которая при вращении вокруг прямой l образует поверхность минимальной площади?

2) если такая кривая существует, то как ее найти?

Выберем в данной плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы прямая l совпала с осью Ox, а точки P_1 и P_2 лежали в верхней полуплоскости. Итак, пусть точки P_1 и P_2 имеют координаты (a, A) и (b, B). Пусть $A > 0$ и $B > 0$. Рассмотрим гладкие кривые, соединяющие эти две точки, причем ограничимся только теми, которые являются графиками положительных функций, т.е. задаются формулой $y = y(x)$, где $y \in C^1(a, b)$ и $y(x) > 0 \quad (x \in [a, b])$. Площадь поверхности, получаемой при вращении такой кривой вокруг оси Ox,

$$F[y] = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx. \qquad (2.5)$$

Задача о минимальной поверхности вращения сводится к определению минимума функционала, задаваемого следующими условиями:

1) класс допустимых функций состоит из тех положительных функций $y \epsilon C^1(a, b)$, которые удовлетворяют граничному условию

$$y(a) = A, \qquad y(b) = B; \tag{2.6}$$

2) формула (2.5) задает правило, которое каждой допустимой функции ставит в соответствие действительное число, т. е. интегральный функционал.

2.3. Простейшая вариационная задача

Рассмотренные в предыдущих двух пунктах функционалы являются конкретными примерами функционалов, связанных со следующей общей постановкой задачи [1]. Пусть $T \subset R^2$ – выпуклая область; $Q = T \times R^1$ (точки Q обозначаются (x, y, z)); $F \in (R^3 \to R^1) \cap C(Q)$ – заданная функция, называемая основной; $P_1 = (a, A)$, $P_2 = (b, B)$ – две произвольные фиксированные точки T такие, что $a < b$.

Функционал Jопределяется следующим образом.

1. Функцию $y \in (R^1 \to R^1)$ назовем *допустимой* (обозначение $y \in D_J$), если $y \in C^1(a, b)$; $y(a) = A, \quad y(b) = B$; $\big(x, y(x), y'(x)\big) \in Q$.

2. Каждой допустимой функции у сопоставим действительное число по формуле

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx\ . \tag{2.7}$$

Этими условиями на множестве D_J определен функционал J.

З а м е ч а н и я.

I. При исследовании экстремума функционала, относящегося к определенному выше типу, будем говорить о вариационной задаче с неподвижными границами первого порядка на плоскости (в дальнейшем кратко: *простейшая вариационная задача*).

II. Простейшая вариационная задача становится конкретной, когда задаются область T, основная функция F и точки P_1, P_2.

III. Задачи, приведенные в предыдущих пунктах, являются примерами простейшей вариационной задачи. В задаче о брахистохроне

$T = \{(x, y) \in R^2 | y > -\alpha\}$, $F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{y+\alpha}}$, а в задаче о минимальной поверхности вращения $T = R^2$, $F(x, y, z) = 2\pi y\sqrt{1 + z^2}$.

IV. В литературе, аналогично тому, как это делается при исследовании функций в классическом анализе, функционал J обозначают так же, как и его значение на каком-либо элементе, например, символом $J(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx$, предварительно задав область определения D_J.

3. Сильный и слабый локальный экстремум

При постановке простейшей вариационной задачи под экстремумом функционала мы до сих пор понимали *абсолютный экстремум*. Определение экстремумов функций из $R^n \to R^1$ основано на понятии *локального экстремума*. Такую же важную роль локальные экстремумы играют и в вариационном исчислении [1].

Определение локального экстремума для функционалов аналогично определению локального экстремума для функций из $R^n \to R^1$: рассматриваются только те элементы из области определения, которые находятся достаточно близко к какому-то данному элементу или, другими словами, попадают в какую-то окрестность данного элемента. Область определения исследуемых функционалов можно по-разному превратить в метрическое пространство и, соответственно, локальный экстремум также можно определить по-разному.

Определение 1. *Расстоянием нулевого порядка* между функциями $y_0, y_1 \in (R^1 \to R^1) \cap C(a, b)$ называют число $\rho(y_0, y_1) = = max|y_0(x) - y_1(x)|$ $x \in [a, b]$. *Расстоянием первого порядка* между функциями $y_0, y_1 \in (R^1 \to R^1) \cap C^1(a, b)$ называют число $\rho^1(y_0, y_1) = \rho(y_0, y_1) + \rho(y_0', y_1')$.

После введения понятия расстояния окрестность функции определяется обычным образом.

Определение 2. Для произвольного $\rho > 0$ под окрестностью функции $y_0 \in (R^1 \to R^1) \cap C(a, b)$радиуса ρ нулевого порядка понимаем класс функций

$$K_\rho(y_0) = \{y \in (R^1 \to R^1) \cap C(a, b) | \rho(y, y_0) < \rho\},$$

а под окрестностью функции $y_0 \in (R^1 \to R^1) \cap C^1(a, b)$ первого порядка – класс функций

$$K^1_\rho(y_0) = \{y \in (R^1 \to R^1) \cap C^1(a,b) | \rho^1(y, y_0) < \rho\}.$$

Очевидно, что $K_\rho(y_0) \supset K^1_\rho(y_0)$. В случае когда радиус данной окрестности не имеет существенного значения (например, если важно только существование окрестности с каким-то свойством), обозначение радиуса будем опускать и писать $K^1(y_0)$ или $K(y_0)$.

В простейшей вариационной задаче особую роль играют окрестности нулевого и первого порядков, так как значение интеграла $\int_a^b F(x, y, y')dx$ определяется функциями y и y'. В приводимом ниже определении будет дано понятие локального экстремума, соответствующего этим двум типам окрестностей.

Определение 3. *Функционал J достигает сильного локального минимума на функции $y_0 \in D_J$, если у функции y_0 существует такая окрестность нулевого порядка $K(y_0)$, что для любой функции $y \in K(y_0) \cap D_J$ выполняется неравенство $J(y) \geq J(y_0)$.*

Определение 4. *Функционал J достигает слабого локального минимума на функции $y_0 \in D_J$, если у функции y_0 существует такая окрестность первого порядка $K^1(y_0)$, что для любой функции $y \in K^1(y_0) \cap D_J$ выполняется неравенство $J(y) \geq J(y_0)$.*

Сильный локальный и слабый локальный максимумы определяются обратными неравенствами. Когда функционал J достигает на функции y_0 сильного (слабого) локального минимума, говорят также, что функция y_0 доставляет функционалу J сильный (слабый) локальный минимум.

Из приведенных определений ясно, что абсолютная экстремаль является локальной сильной, а локальная сильная экстремаль в то же время является и локально слабой экстремалью. Обратное, вообще говоря, неверно.

4. Необходимое условие экстремума. Лемма Лагранжа

Необходимое условие слабого экстремума является необходимым условием и для сильного экстремума. Необходимое условие сильного экстремума является необходимым и для абсолютного экстремума.

Изложим метод Лагранжа [1], с помощью которого мы сможем получить дифференциальное уравнение

$$F_y\big(x, y(x), y'(x)\big) - \tfrac{d}{dx} F_{y'}\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0, \tag{4.1}$$

впервые выведенное Эйлером, как *необходимое условие*, которому должна удовлетворять функция, доставляющая слабый экстремум функционалу (2.7). Для этого возьмем *сужение* функционала (2.7) получаемое заменой условия $y \in C^1(a,b)$ условием $y \in C^2(a,b)$, которое требует от функции y непрерывности второй ее производной на отрезке $[a,b]$. Целесообразность этого сужения оправдывается тем, что в качестве необходимого условия мы хотим получить дифференциальное уравнение второго порядка. Для этого же предположим, что $F \in C^2(Q)$. В этом пункте I означает измененный таким образом функционал. Справедлива следующая терема.

Теорема 1. *Если функционал I достигает экстремума на допустимой функции y, то функция y должна удовлетворять дифференциальному уравнению Эйлера (4.1).*

Доказательство. Предположим, что функционал I достигает экстремума на функции $y \in D_I$. Фиксируем произвольную функцию η, удовлетворяющую условиям

$$\eta \epsilon (R^1 \to R^1) \cap C^2(a,b); \;\; \eta(a) = \eta(b) = 0 \tag{4.2}$$

и рассмотрим однопараметрическое семейство функций

$$\omega(x,\alpha) = y(x) + \alpha\eta(x) \;\; \big((x,\alpha) \in [a,b] \times R^1\big). \tag{4.3}$$

Из (4.3) и из того, что множество Q открытое, следует, что при любом достаточно малом α, т.е. принадлежащем некоторой окрестности нуля $k(0)$, значения $\omega(x,\alpha)$ принадлежат D_I. Так как $\omega(x,0) = = y(x)$ $(x \in [a,b])$, то функция $\varphi(\alpha) = I[\omega(x,\alpha)]$ $(\alpha \in k(0))$, принадлежащая $C^2(k(0))$, достигает во внутренней точке $\alpha = 0$ экстремума и, следовательно, по известной теореме о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра, должно выполняться равенство

$$\varphi'(0) = \int_a^b \{F_y\big(x, y(x), y'(x)\big)\eta(x) + \\ + F_{y'}\big(x, y(x), y'(x)\big)\eta'(x)\} dx = 0. \tag{4.4}$$

Второе слагаемое в подынтегральном выражении проинтегрируем по частям. С учетом (4.2) получим

$$\varphi'(0) = \int_a^b \left\{ F_y\big(x, y(x), y'(x)\big) - \frac{d}{dx} F_{y'}\big(x, y(x), y'(x)\big) \right\} \times$$
$$\times\, \eta(x) dx = 0. \tag{4.5}$$

Выражение, заключенное в фигурные скобки, представляет собой непрерывную функцию. Докажем, что эта функция тождественно равна нулю. Сформулируем это утверждение в виде отдельной леммы.

Лемма Лагранжа. *Пусть $m \in R^1 \to R^1$ – непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция. Предположим, что для любой функции η, удовлетворяющей условиям (4.2), выполняется равенство*

$$\int_a^b m(x)\eta(x) dx = 0. \tag{4.6}$$

Тогда для всех $x \in [a, b]$

$$m(x) = 0.$$

Доказательство. Применим метод доказательства от противного. Предположим, что на отрезке $[a, b]$ существует точка, в которой функция m не равна нулю. Тогда в силу непрерывности функция m отлична от нуля и в некоторой внутренней точке x_0 отрезка $[a, b]$. Пусть, например, $m(x_0) > 0$. Тогда, также в силу непрерывности m, существует такое число $\delta > 0$, что $m(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset$ $\subset (a, b)$. Рассмотрим функцию на отрезке $[a, b]$, которая при $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ определяется равенством $\eta^*(x) = (x - x_0 +$ $+\delta)^4 \times (x + x_0 - \delta)^4$, а в остальных точках равна нулю. Эта функция удовлетворяет условиям (4.2). Из ее определения следует, что

$$\int_a^b m(x)\eta^*(x) dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} m(x)\eta^*(x) dx > 0.$$

Полученное неравенство противоречит условию леммы (4.6). Тем самым лемма доказана. Применяя лемму Лагранжа к функции

$$m(x) = F_y\big(x, y(x), y'(x)\big) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y(x), y'(x)),$$

непрерывной на отрезке $[a,b]$, получим, что функция y должна удовлетворять дифференциальному уравнению Эйлера.

5. Классическая трактовка вариации. Первая вариация и ее связь с дифференциальным уравнением Эйлера

Метод, примененный при доказательстве теоремы 1, основан на обобщении понятия *производной по направлению*. В самом деле, под производной по направлению $e \epsilon R^n$ $(|e| = 1)$ функции $g \in R^n \to R^1$ в точке a, являющейся внутренней точкой области определения g, понимается производная функции $\varphi_1(\alpha) = \mathrm{g}(a + \alpha e)$ $(\varphi_1 \in R^1 \to R^1)$, т.е. число

$$\varphi_1'(0) = \frac{\partial g(a)}{\partial e}.$$

Если функция g принимает в точке a экстремальное значение, то производная этой функции $\frac{\partial g(a)}{\partial e}$ по любому направлению должна обратиться в нуль. Так как производная по направлению равна скалярному произведению градиента функции g на единичный вектор направления e, т.е. $\frac{\partial g(a)}{\partial e} = (g'(a), e)$, то это условие принимает вид $g'(a) = 0 \in R^n$.

В приведенном выше доказательстве теоремы 1 мы рассматривали изменение функционала при изменении аргумента в «направлении» функции η, т.е. рассматривали функцию $\varphi(\alpha) = I(y + \alpha\eta)$ и ее производную в точке $\alpha = 0$. Равенство (4.4), по аналогии с соответствующим равенством для функции из $R^n \to R^1$, означает, что «*производная*» *функционала по направлению произвольной функции* η, *удовлетворяющей условию (4.2), равна нулю*.

В определении производной функции $g \in R^n \to R^1$ по направлению e обычно предполагается, что e – единичный вектор. Для полной аналогии можно было бы ограничиться только такими функциями η, «длина» (норма) которых в каком-то смысле равна единице. При дифференцировании это привело бы лишь к появлению постоянного множителя, который для нашего исследования не имеет значения, так как важным является только вопрос о равенстве производной нулю.

Лагранж, естественно, применял свой метод, не пользуясь приведенной формализацией, которая получила четкость в современной математике. По аналогии с дифференциалом им была введена так называемая *вариация*, обычно обозначаемая буквой δ. Строгого определения вариаций Лагранж не дал, а привел правила действия над ними.

Формальный подсчет вариаций позволил решить широкий круг задач, связанных с экстремумами функционалов. После работ Лагранжа долгое время основную проблему видели именно в составлении вариации для все более общих типов функционалов, в подсчете вариаций, в «вариационном исчислении».

Символику Лагранжа, взяв для примера простейшую вариационную задачу, можно формализовать следующим образом [1]. Пусть $y \in (R^1 \to R^1) \cap C^2(a,b)$ – данная функция, а $\omega(x,\alpha) \in (R^2 \to R^1) \cap$ $\cap\, C^2([a,b] \times k(0))$ – однопараметрическое семейство функций, удовлетворяющих условию $\omega(x,0) = y(x)$ $(x \in [a,b])$.

Под (первой) вариацией некоторой функции $\psi(x,y,y') \in (R^3 \to$ $\to R^1) \cap C^1$ (в предположении, что имеет смысл сложная функция $\psi\big(x,\omega(x,\alpha),\omega_x(x,\alpha)\big)$ $\{(x,\alpha) \in [a,b] \times k(0)\}$) относительно y понимается функция

$$\delta\psi = \frac{\partial\psi(x,\omega(x,\alpha),\omega_x(x,\alpha))}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} * \alpha.$$

Таким образом, при фиксированных функциях y и ω вариация $\delta\psi$ является функцией x и α $(D_{\delta\psi} = [a,b] \times k(0);\ \delta\psi \in R^2 \to R^1)$. В частности, если в качестве $\omega(x,\alpha)$ взять (4.3), а в качестве ψ – функции y, y' и F, то для их вариаций получим следующие представления:

$$\delta y = \alpha\eta(x); \tag{5.1}$$

$$\delta y' = \alpha\eta'; \tag{5.2}$$

$$\delta F = F_y\big(x,y(x),y'(x)\big)\delta y + F_{y'}\big(x,y(x),y'(x)\big)\delta y'. \tag{5.3}$$

Равенство (5.2) можно записать в виде $(\delta y)' = \delta y'$.

В заключение определим так называемую первую вариацию функционала относительно функции $y \in D_I$ так, чтобы «операции» вариации и интегрирования были перестановочными, т.е. положим

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx =$$
$$\int_{x_1}^{x_2} \{F_y(x, y(x), y'(x)\delta y + F_{y'}(x, y(x), y'(x)\delta y'\} dx. \qquad (5.4)$$

Равенство (4.4) выражает то же самое, что и тождество $\delta I = 0$, которое следует понимать так, что оно выполняется для любых функций $\omega(x, \alpha)$ типа (4.3). Эти вариации также исчерпывают все возможные случаи в том смысле, что *любую допустимую функцию можно представить в виде* $y + \delta y$.

Итак, Лагранж рассматривал вариацию δy как разность исходной и измененной («провариированной») функции. Установленное им тождество $\delta I = 0$, по существу, выражает то, что при малом изменении функции, на которой достигается экстремум, изменение «главной части» функционала равно нулю.

Первой вариацией функционала Лагранж называл произведение $\varphi'(0)\alpha$*, являющееся дифференциалом функции* $\varphi(\alpha)$ *при* $\alpha = 0$.

Таким образом, если следовать Лагранжу, то

$$\delta I = \varphi'(0)\alpha = \int_a^b \left\{F_y\big(x, y(x), y'(x)\big) - \frac{d}{dx} F_{y'}\big(x, y(x), y'(x)\big)\right\} \delta y(x) dx,$$
$$\delta y = \alpha \eta(x).$$

В современном анализе применяют несколько отличающееся от лагранжева определение первой вариации, полагая

$$\delta I(\eta) = \varphi'(0) =$$
$$= \int_a^b \left\{F_y\big(x, y(x), y'(x)\big) - \frac{d}{dx} F_{y'}\big(x, y(x), y'(x)\big)\right\} \eta(x) dx.$$

Напомним, что в рассуждениях предыдущего пункта дифференциальное уравнение Эйлера получено из (4.5) с применением леммы Лагранжа. Равенство (4.5) эквивалентно тождеству $\delta I \equiv 0$. Наоборот, из (4.5) ясно, что если y есть решение дифференциального уравнения Эйлера, то $\delta I \equiv 0$.

Таким образом, *для того, чтобы первая вариация функционала* I *относительно функции* $y \in D_I$ *тождественно обращалась в нуль (т.е. чтобы равенство* $\delta I(\eta) = 0$ *выполнялось для любой функции,* *удовлетворяющей условию (4.2)), необходимо и достаточно, чтобы функция y являлась решением дифференциального уравнения Эйлера (4.1).*

Считая важной историческую ссылку, освещающую происхождение названия «вариационное исчисление», отметим и то, что в прикладных задачах применяют «язык вариаций» именно в вышеупомянутом понимании, более близком к первоначальному лагранжеву подходу, а не к современному, являющемуся более общим и простым по форме.

Пример. Пусть определяющими данными функционала являются следующие: $T = R^3$, $F(x, y, y') = {y'}^2 + y^2 + 2xy$, $P_1 = (0{,}0)$, $P_2 = (1{,}0)$. Покажем, что из допустимых функций одна и только одна удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера:

$$F_y\big(x, y(x), y'(x)\big) - \frac{d}{dx} F_{y'}\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0.$$

В нашем случае это уравнение имеет вид $2y + 2x - \frac{d}{dx}(2y') = 0$ или $y'' - y = x$.

Для нахождения общего решения этого неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - y = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$ имеет два корня: 1 и −1. Общее решение однородного уравнения записывается в виде $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. В качестве частного решения неоднородного уравнения можно взять функцию $y = -x$. Общим решением неоднородного уравнения будет сумма общего решения однородного уравнения и любого частного решения неоднородного: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x$.

Поскольку график решения должен проходить через точки $P_1 = (0{,}0)$, $P_2 = (1{,}0)$, выделим из общего решения частное, удовлетворяющее граничным условиям $y(0) = 0$, $y(1) = 0$. Для определения C_1 и C_2 имеем два уравнения

$$C_1 e^0 + C_2 e^0 - 0 = 0,$$
$$C_1 e^1 + C_2 e^{-1} - 1 = 0.$$

Из этих уравнений находим, что $C_1 = -C_2$ и $C_1 = \frac{1}{e - e^{-1}}$.

Таким образом, из допустимых функций только одна функция

$$y = \frac{1}{e - e^{-1}}(e^x - e^{-x}) - x$$

удовлетворяет уравнению Эйлера.

6. Дифференциальное уравнение Эйлера

Выше было показано, что в случае функционала I, относящегося к простейшей вариационной задаче (при дополнительных условиях $F \in C^2(Q)$ и $y \in C^2(a, b)$, следующие два условия эквивалентны:

1) первая вариация функционала I относительно y является тождественным нулем ($\delta I \equiv 0$);

2) y является решением дифференциального уравнения Эйлера (4.1):

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = F_y(x, y, y') - F_{xy'}(x, y, y') - F_{yy'}(x, y, y')y' - \\ -F_{y'y'}(x, y, y')y'' = 0. \qquad (6.1)$$

Ранее мы убедились также, что любая экстремальная функция должна удовлетворять дифференциальному уравнению Эйлера (4.1). Часто в силу традиции *любое решение дифференциального уравнения Эйлера называют экстремалью независимо от того, принимает на нем данный функционал экстремальное значение или нет*. Мы будем придерживаться этой традиции. Вместо этого термина для решения дифференциального уравнения Эйлера иногда применяют и термин «стационарная функция».

Выше отмечалось, что условие $\delta I \equiv 0$ аналогично условию $d\Phi \equiv 0$, относящемуся к функции Φ из $R^n \to R^1$. Оба условия являются необходимыми условиями существования экстремума и позволяют определить функции или точки, доставляющие экстремум. Условие $\delta I \equiv 0$ эквивалентно дифференциальному уравнению, которому должна удовлетворять экстремальная функция, а условие $d\Phi \equiv 0$ – такой системе обычных уравнений, которой должны удовлетворять координаты точки, дающей экстремум.

Итак, для определения экстремали задачи на плоскости, соответствующей функционалу I с определяющими данными T, F, P_1, P_2, на первом этапе следует решить краевую задачу для уравнения второго порядка:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0,\;\; y(a) = A,\;\; y(b) = B. \qquad (6.2)$$

Исследование простейшей вариационной задачи включает рассмотрение всевозможных пар точек $P_1, P_2 \in T(a < b)$. В соответствии с этим для общего исследования необходимо получить все такие решения краевой задачи (6.2), для которых $(a, A), (b, B) \in T$ и $a < b$.

Для проведения общего исследования можно применять разные методы. Часто применяемый заключается в попытке получить общее решение дифференциального уравнения Эйлера и, если это удалось, определить те граничные условия, для которых можно решить данную краевую задачу. Для остальных пар точек соответствующая экстремальная задача на данном классе допустимых функций не имеет решения.

Отметим, что структура дифференциальных уравнений Эйлера сложна, обычно это неявные дифференциальные уравнения второго порядка, поэтому общий метод их решения неизвестен, применение же известных приближенных методов обычно связано с трудностями при вычислениях. Хотя во многих конкретных случаях решения дифференциального уравнения Эйлера можно получить в квадратурах, данные уравнения имеют прежде всего теоретическое значение [1].

Интегрирование дифференциального уравнения Эйлера значительно упрощается, если основная функция F является неполной. Под этим понимается какой-либо из случаев $F_x = 0$ или $F_y = 0$.

1. Предположим, что основная функция не зависит от y: $F = F(x, y')$. Тогда соответствующее д. у. Эйлера также будет «неполным». Вместо применения общих методов интегрирования неполных дифференциальных уравнений второго порядка целесообразно исходить сразу из д. у. Эйлера, являющегося специальным д. у. второго порядка. Так как $F_y = 0$, то для любого решения у уравнения (6.1) выполняется тождество $\frac{d}{dx}F_{y'}\big(x, y'(x)\big) = 0\;\; (x \in D_y)$. Следовательно, существует такая константа C, для которой функция y удовлетворяет д. у. первого порядка:

$$F_{y'}(x, y') = C. \qquad (6.3)$$

Верно и обратное. Итак, верно следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если F_y является тождественным нулем на множестве Q, то любое решение д. у. Эйлера (6.1) удовлетворяет д. у. первого порядка (6.3) (с некоторой константой C) и, наоборот, любое два раза непрерывно дифференцируемое решение уравнения (6.3) удовлетворяет д. у. Эйлера (6.1).*

Левая часть равенства (6.3) носит название интеграла дифференциального уравнения Эйлера, поскольку она сохраняет постоянное значение вдоль любого решения уравнения Эйлера. В задачах механики этот интеграл называют *интегралом импульса*.

2. Предположим, что основная функция не зависит от x: $F = F(y, y')$ и пусть y – какое-то решение д. у. Эйлера. Тогда

$$\begin{gathered}\frac{d}{dx}\left[F\big(y(x), y'(x)\big) - y'(x)F_{y'}\big(y(x), y'(x)\big)\right] = F_y\big(y(x), y'(x)\big)y'(x) + \\ +F_{y'}\big(y(x), y'(x)\big)y''(x) - y''(x)F_{y'}\big(y(x), y'(x)\big) - \\ -y'(x)\frac{d}{dx}F_{y'}\big(y(x), y'(x)\big) = \\ = y'(x)\left\{F_y\big(y(x), y'(x)\big) - \frac{d}{dx}F_{y'}\big(y(x), y'(x)\big)\right\} = 0 \ \ \big(x \in D_y\big). \quad (6.4)\end{gathered}$$

Иначе говоря, существует такая константа C, для которой функция y удовлетворяет д. у. первого порядка:

$$F(y, y') - y'F_{y'}(y, y') = C. \quad (6.5)$$

Наоборот, если y – такое два раза непрерывно дифференцируемое решение д. у. (6.5), для которого всюду, кроме не более чем конечного множества точек, выполняется неравенство $y'(x) \neq 0$, то выражение в фигурных скобках в (6.4) должно обратиться в нуль в любой точке D_y, т.е. функция y удовлетворяет д. у. (6.1). Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. *Если F_x является тождественным нулем на множестве Q, то любое решение соответствующего д. у. Эйлера удовлетворяет (с некоторой константой C) д. у. первого порядка (6.5) и, наоборот, любое два раза непрерывно дифференцируемое решение д. у. (6.5), производная которого обращается в нуль не более чем в конечном числе точек, удовлетворяет д. у. Эйлера (6.1).*

Левая часть равенства (6.5) носит название интеграла дифференциального уравнения Эйлера, поскольку она сохраняет постоянное значение вдоль любого решения уравнения Эйлера. В задачах механики этот интеграл называют *интегралом энергии*.

Пример 1. Найти допустимые решения уравнения Эйлера для простейшей вариационной задачи

$$I(y) = \int_{0,5}^{2} \big(1 + x^2 y'(x)\big) y'(x) dx, \ \ y(0{,}5) = 2, y(2) = 0{,}5.$$

Поскольку основная функция не зависит от y, уравнение Эйлера для данной задачи имеет интеграл импульса $F_{y'} = 1 + 2x^2 y' = \mathrm{const}$. Отсюда $y' = \frac{\mathrm{const}-1}{2x^2} = -\frac{C_1}{x^2}$. Интегрируя, находим $y = \frac{C_1}{x} + C_2$. Найденные решения часто называют *экстремалями*. Краевые условия дают два уравнения для определения значений констант C_1 и C_2:

$$2 = \frac{C_1}{0{,}5} + C_2,$$

$$0{,}5 = \frac{C_1}{2} + C_2.$$

Решая эти уравнения, находим, что $C_1 = 1$ и $C_2 = 0$. Таким образом, существует только одно допустимое решение уравнения Эйлера $y = \frac{1}{x}$. Это решение называют *допустимой экстремалью*.

Пример 2. Найти допустимые решения уравнения Эйлера для функционала [2]

$$I(y) = \int_{1}^{2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx,$$

графики которых проходят через точки $P_1 = (1{,}1)$ и $P_2 = (2{,}2)$, лежащие в верхней полуплоскости.

Поскольку основная функция не зависит от x, уравнение Эйлера имеет интеграл энергии

$$F(y, y') - y' F_{y'}(y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - y' \frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}} = \mathrm{const}.$$

После приведения к общему знаменателю получим

$$\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}} = \mathrm{const} \text{ или } y = \frac{C_1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Будем искать решение в параметрической форме. Введем параметр ξ так, чтобы $y' = \frac{dy}{dx} = \mathrm{ctg}\xi$. Тогда $y = \frac{C_1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{C_1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\xi}} = C_1 \sin\xi$ и дифференциал параметрического представления ординаты графика искомого решения dy будет равен $C_1\cos\xi d\xi$. Найдем дифференциал параметрического представления абсциссы графика искомого решения:

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1\cos\xi d\xi}{\operatorname{ctg}\xi} = C_1\sin\xi d\xi.$$

Интегрируя, находим $x = -C_1\cos\xi + C_2$. Таким образом, получено параметрическое представление решений уравнения Эйлера (экстремалей)

$$\begin{cases} x - C_2 = -C_1\cos\xi, \\ \quad y = C_1\sin\xi. \end{cases}$$

Возведем левую и правую части этих уравнений в квадрат и сложим полученные уравнения. В результате получим неявное уравнение окружности $(x - C_2)^2 + y^2 = {C_1}^2$ с центром на оси абсцисс (координаты центра $(C_2, 0)$) и радиусом C_1. Нас интересуют полуокружности этого двухпараметрического семейства, лежащие в верхней полуплоскости. Эти полуокружности являются графиками решений уравнения Эйлера. Центр окружности, проходящей через точки $P_1 = (1, 1)$ и $P_2 = (2, 2)$, лежит на прямой, нормальной к отрезку P_1P_2 и проходящей через его середину. Серединой этого отрезка является точка $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Найдем вектор, ортогональный вектору $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Таким является вектор, например, $-\vec{\imath} + \vec{\jmath}$, поскольку его умножение на $\overrightarrow{P_1P_2}$ скалярно дает нуль. Уравнение прямой с направляющим вектором $-\vec{\imath} + \vec{\jmath}$, проходящей через точку $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, имеет вид

$$\frac{x - \frac{3}{2}}{-1} = \frac{y - \frac{3}{2}}{1}.$$

Для определения абсциссы точки пересечения этой прямой с осью абсцисс положим в уравнении прямой $y = 0$ и найдем, что $x = 3$. Расстояние от точки $P_1 = (1, 1)$ до точки $(3, 0)$ равно $\sqrt{5}$. Это расстояние есть радиус искомой окружности $(x - 3)^2 + y^2 = 5$. Таким образом, единственным допустимым решением уравнения Эйлера является функция

$$y = \sqrt{5 - (x - 3)^2}.$$

Пример 3. Решить уравнение Эйлера для задачи о брахистохроне. В этом случае основная функция (с точностью до постоянного множителя $1/\sqrt{2\mathrm{g}}$) следующая:

$$F(x,y,y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y+\alpha}} \quad (\alpha > 0, Q = \{(x,y,y') \in R^3 | y > \alpha\}.$$

Так как и в этом случае F не зависит от x, то любое решение соответствующего д. у. Эйлера удовлетворяет д. у. первого порядка

$$F - y'F_{y'} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y+\alpha}} - y' \times$$
$$\times \frac{y'}{\sqrt{y+\alpha}\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{y+\alpha}\sqrt{1+y'^2}} = \mathrm{const},$$

которое, если обозначить через $1/\sqrt{2\mathrm{R}}$ постоянную, являющуюся положительной, эквивалентно уравнению $\sqrt{y+\alpha}\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{2R}$, или (после возведения в квадрат и деления) д. у.

$$y + \alpha = \frac{2R}{1+y'^2}. \tag{6.6}$$

Параметризуем кривую $y = y(x)$ $(x \in D_y)$, для чего выразим $y'(x)$ через параметр с помощью подходящим образом выбранной функции φ. Пусть, например, $\varphi(t) = \mathrm{ctg}(t/2)$, т.е.

$$y'(x) = \mathrm{ctg}(t/2) \ (t \in \Delta \subset (0{,}2\pi)),$$

где интервал Δ выберем так, чтобы при изменении t на Δ множество значений функции $\mathrm{ctg}(t/2)$ совпало с $R_{y'}$. Из (6.6)

$$y + \alpha = \frac{2R}{1+\mathrm{ctg}^2(t/2)} = 2R\sin^2\frac{t}{2} = R(1-\mathrm{cos}t)\,. \tag{6.7}$$

С помощью (6.7) производную функции $x = x(t)$ можно выразить следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt} = R\text{tg}\frac{t}{2}\text{sint} \ ,$$

т.е. $\frac{dx}{dt} = 2R\sin^2\frac{t}{2} = R(1 - \text{cost})$. Отсюда $x + \beta = R(t - \text{sin}t)$ $(t \in \Delta)$, где β – произвольная постоянная.

На основании проведенных рассуждений можно сделать следующий вывод. Общее решение д. у. Эйлера в параметрической форме, относящееся к основной функции

$$F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y+\alpha}} \quad (\alpha > 0;\ D_f = Q = \{(x, y, y') \in R^3 | y > -\alpha\}),$$

определяется двухпараметрическим семейством функций

$$\begin{matrix} x + \beta = R(t - \text{sint}), \\ y + \alpha = R(1 - \text{cost}), \end{matrix} \quad (t \in (0{,}2\pi);\ \ R > 0,\ \ \beta \in R^1). \tag{6.8}$$

Итак, получено параметрическое представление *циклоиды*. Данная кривая является траекторией точки, лежащей на окружности радиуса R, которая катится по прямой, определяемой уравнением $y = -\alpha$. Таким образом доказано, что *если задача о брахистохроне имеет два раза непрерывно дифференцируемое решение, то это циклоида, принадлежащая семейству* (6.8).

Пример 4. В задаче о минимизации поверхности вращения основная функция (с точностью до множителя 2π) следующая:

$$F(x, y, y') = y\sqrt{1 + y'^2} \ \ (Q = R^3).$$

Так как F не зависит от x, то любое решение д. у. Эйлера удовлетворяет д. у. первого порядка

$$F - y'F_{y'} = y\sqrt{1 + y'^2} - y'y\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = \alpha.$$

Полученное дифференциальное уравнение можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$y = \alpha\sqrt{1 + y'^2}. \tag{6.9}$$

Так как $\sqrt{1+y'^2} > 0$, у (6.9) нет такой интегральной кривой, которая из полуплоскости $y \geq 0$ перешла бы в полуплоскость $y < 0$ и наоборот. Поэтому, не ограничивая общности, α можно выбрать неотрицательным: если y – решение (6.9) при $\alpha > 0$, то функция $-y$ удовлетворяет уравнению, полученному из (4.7) заменой α на $-\alpha$, и наоборот.

Проще всего уравнение (6.9) интегрируется подстановкой $y' = \mathrm{sh}t$, тогда $y = \alpha\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t} = \alpha\mathrm{ch}t$, а

$$dx = \frac{dy}{y\prime} = \frac{\alpha\mathrm{sh}t dt}{\mathrm{sh}t} = \alpha dt,\ \ x = \alpha t + \beta.$$

Исключая параметр t, получим $y = \alpha\mathrm{ch}\frac{x-\beta}{\alpha}$ – семейство цепных линий. Общее решение д. у. Эйлера, связанного с основной функцией $F(x,y,y') = y\sqrt{1+y'^2}$ $(D_f = Q = R^3)$, записывается в виде двухпараметрического семейства функций Φ:

$$\Phi(x,\alpha,\beta) = \alpha\mathrm{ch}\frac{x-\beta}{\alpha}\ \ (\alpha \in R^1\{0\};\ \beta \in R^1; x \in R^1). \tag{6.10}$$

Возвращаясь к исходной геометрической задаче, можно заключить, что *если задача о минимальной поверхности вращения имеет два раза непрерывно дифференцируемое решение, то это решение есть «цепная линия», принадлежащая семейству* (6.10).

Для задач, исследованных в этом пункте, с практической точки зрения важен ответ на вопрос о том, при каких граничных условиях разрешима соответствующая краевая задача (6.2). В случае задачи о минимальной поверхности вращения этот вопрос, очевидно, эквивалентен вопросу о том, разрешима ли при данных точках $(a,A),(b,B)$ система уравнений

$$\alpha\mathrm{ch}\frac{a-\beta}{\alpha} = A,\ \ \alpha\mathrm{ch}\frac{b-\beta}{\alpha} = B \tag{6.11}$$

относительно неизвестных α и β. В случае задачи о брахистохроне для соответствующих (в силу параметрического представления, четырех) неизвестных b, β, t_1, t_2 система уравнений имеет вид

$$x_1 + \beta = R(t_1 - \sin t_1), \quad y_1 + \alpha = R(1 - \cos t_1),$$
$$x_2 + \beta = R(t_2 - \sin t_2), \quad y_2 + \alpha = R(1 - \cos t_2). \qquad (6.12)$$

Исследование разрешимости приведенных систем уравнений требует сложных вычислений, поэтому мы на этом останавливаться не будем. Отметим, что система (6.12) при любых граничных условиях имеет однозначное решение, однако (6.11) разрешима не при любых возможных граничных условиях и даже в случае разрешимости решение не всегда однозначно.

7. Поле экстремалей

Семейство кривых $y = y(x, C)$ образует *собственное поле* в заданной области D плоскости xOy, если через каждую точку (x, y) этой области проходит одна и только одна кривая семейства $y = y(x, C)$.

Угловой коэффициент $p(x, y)$ касательной к кривой семейства $y = y(x, C)$, проходящей через точку (x, y), называется *наклоном поля* в точке (x, y).

Семейство кривых $y = y(x, C)$ образует *центральное поле* в области D плоскости xOy, если эти кривые покрывают без самопересечений всю область D и исходят из одной точки (x_0, y_0), лежащей вне области D. Точка (x_0, y_0) называется центром пучка кривых [4].

Пример 1. Внутри круга $x^2 + y^2 \leq 1$ семейство кривых $y = Ce^x$, где C – произвольная постоянная, в частности $C = 0$ образует собственное поле, так как эти кривые нигде не пересекаются и через каждую точку (x, y) круга проходит одна и только одна кривая этого семейства. Наклон поля в произвольной точке (x, y) равен $p(x, y) = Ce^x = y$.

Пример 2. Семейство парабол $y = (x + C)^2$ внутри круга $x^2 + y^2 \leq 1$ собственного поля не образует, так как различные кривые семейства пересекаются внутри круга и не покрывают всю область.

Пример 3. Семейство кривых $y = Cx$ образует центральное поле в области $x > 0$.

Если поле (собственное или центральное) образовано семейством экстремалей некоторой вариационной задачи, то оно называется *полем экстремалей*.

Пример 4. Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_0^1 y'^2(x)dx.$$

Его экстремалями являются прямые $y = C_1x + C_2$. Семейство экстремалей $y = C_2$ образует собственное поле, а семейство экстремалей $y = C_1x$ – центральное поле с центром в начале координат.

Упражнение. Для функционала

$$J[y] = \int_0^a (y'^2(x) + y^2(x))dx, \quad a > 0,$$

Указать собственное и центральное поле экстремалей.

Пусть кривая $y = y(x)$ является экстремалью функционала

$$y = \int_a^b F(x, y, y')dx,$$

проходящей через точки (a, A) и (b, B). Говорят, что экстремаль $y = y(x)$ *включена в собственное поле экстремалей*, если найдено семейство экстремалей $y = y(x, C)$, образующее поле, содержащее при некотором значении $C = C_0$ экстремаль $y = y(x)$, причем эта экстремаль не лежит на границе области D, в которой семейство $y = y(x, C)$ образует поле.

Если пучок экстремалей с центром в точке (a, A) в окрестности экстремали $y = y(x)$, проходящей через ту же точку, образует поле, то говорят, что найдено центральное поле, включающее данную экстремаль. За параметр семейства $y = y(x, C)$ принимается угловой коэффициент касательной к кривым пучка в точке (a, A).

Пример 5. Рассмотрим простейшую вариационную задачу для функционала

$$J(y) = \int_0^2 \left(y'^3 + \sin^2 x\right)dx.$$

Пусть $y(0) = 1$, $y(2) = 1$. Семейство экстремалей данного функционала определяется уравнением $y = C_1 x + C_2$. Заданным граничным условиям удовлетворяет экстремаль $y = 1$. Эта экстремаль включается в собственное поле экстремалей $y = C_2$.

Пусть $y(0) = 0$, $y(2) = 4$. Экстремалью, отвечающей этим граничным условиям является прямая $y = 2x$, которая включается в центральное поле экстремалей $y = C_1 x$ с центром в точке $O(0,0)$.

Пример 6. Рассмотрим простейшую вариационную задачу

$$J(y) = \int_{-1}^{1} y(2x - \frac{1}{2}y')dx, \qquad y(-1) = 0, \qquad y(1) = \frac{1}{2}.$$

Решение уравнения Эйлера имеет вид $y = x^2 + C_1 x + C_2$. Экстремаль этой задачи $y = x^2 + \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$ можно включить в собственное поле экстремалей $y = x^2 + \frac{x}{4} + C_2$.

Определение. Пусть имеется семейство $\Phi(x, y, C) = 0$ плоских кривых. *Дискриминантом* этого семейства называется геометрическое место точек, определяемое системой уравнений

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \end{cases}$$

В общем случае в состав дискриминанта входят огибающие семейства, геометрическое место узловых точек и геометрическое место точек заострения. Огибающей семейства $\Phi(x, y, C) = 0$ называется кривая, которая в каждой своей точке касается некоторой кривой данного семейства и каждого участка которой касается бесконечное множество кривых семейства.

Если имеется пучок кривых с центром в точке $A(x_1, y_1)$, то центр пучка принадлежит дискриминанту.

Пример 7. Найти дискриминант семейства кривых $y = (x - C)^2$.

Решение. Уравнения дискриминанта в данном случае имеют вид

$$\begin{cases} y - (x - C)^2 = 0, \\ 2(x - C) = 0. \end{cases}$$

Из этих уравнений следует, что $y = 0$. Нетрудно проверить, что линия $y = 0$ есть огибающая данного семейства. В самом деле, в любой точке $x = x_0$ линия $y = 0$ имеет общую касательную с соответствующей кривой семейства $y = (x - x_0)^2$. Далее, какой бы малый участок линии $y = 0$ мы ни взяли, его касается бесконечное множество кривых данного семейства. В данном случае дискриминант состоит из одной огибающей.

Если дуга AB кривой $y = y(x)$ имеет отличную от A общую точку A^* с дискриминантом пучка $y = y(x, C)$ с центром в точке A, содержащего данную кривую, то точка A^* называется точкой, *сопряженной* с точкой A.

Пример 8. Рассмотрим однопараметрическое семейство кривых $y = C\sin x$. C-дискриминант этого семейства определяется уравнениями

$$\begin{cases} y - C\sin x = 0, \\ \quad -\sin x = 0, \end{cases}$$

т.е. представляет собой дискретное множество точек $(k\pi, 0)$, $k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$ (точки пересечения синусоиды с осью Ox). Взяв, например, $C = 2$, получим кривую $y = 2\sin x$, принадлежащую данному пучку синусоид с центром в точке $O(0{,}0)$. Если другой конец B дуги кривой $y = 2\sin x$ имеет абсциссу $\tilde{x} \in (\pi, 2\pi)$, то дуга OB будет сдержать еще одну точку (кроме точки $O(0{,}0)$), принадлежащую дискриминанту, а именно точку $O^*(\pi, 0)$, которая будет сопряженной с точкой $O(0{,}0)$. Если $0 < x < \pi$, то точек, сопряженных с точкой $O(0{,}0)$, на дуге OB нет.

Упражнение. Дано семейство кривых. Найти точку, сопряженную с точкой $O(0{,}0)$:

$$y = C(x - 1)x;$$
$$y = C\operatorname{sh} x.$$

8. Достаточное условие Якоби возможности включения экстремали в центральное поле экстремалей

Для того чтобы дугу AB экстремали можно было включить в центральное поле экстремалей с центром в точке A, достаточно, чтобы точка A^*, сопряженная с точкой A, не лежала на дуге AB.

Пример 1. Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int_0^a \left(y'^2 - 9y^2 + e^{x^2} - 1\right)dx, \ \ y(0) = 0, \ \ y(a) = 0.$$

Уравнение Эйлера для данного функционала имеет вид $y'' + 9y = 0$. Его общее решение: $y(x) = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x$. Если $a \neq \frac{k\pi}{3}, k$ – целое число, то экстремалью, удовлетворяющей заданным граничным условиям, является прямая $y = 0$. Если рассмотреть однопараметрическое семейство экстремалей $y_1 = C_1 \sin 3x$, то, как легко проверить, дискриминант этого семейства состоит из точек $(\frac{k\pi}{3}, 0)$, k – целое число, поэтому, если $a < \frac{\pi}{3}$, то точки, сопряженной с точкой $O(0,0)$, на экстремали $y = 0$ не будет, и тогда эту экстремаль можно включить в центральное поле экстремалей с центром в точке $O(0,0)$. Если же $a \geq \frac{\pi}{3}$, то на экстремали $y = 0$ будет содержаться по крайней мере одна точка, сопряженная с точкой $O(0,0)$, и достаточное условие Якоби не выполняется. В этом случае экстремали $y_1 = C_1 \sin 3x$ поля не образуют.

9. Аналитическая форма условия Якоби

Рассмотрим простейшую вариационную задачу [4]

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx; \ \ y(a) = y_1, \ \ y(b) = y_2.$$

Если решение $u = u(x)$ *уравнения Якоби*

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\right) \text{ и } -\frac{d}{dx}\left(F_{y'y'}u'\right) = 0,$$

удовлетворяющее начальному условию $u(a) = 0$ и $u'(a) = 1$, обращается в нуль еще в какой-нибудь точке интервала (a, b), то сопряженная с $A(a, y_1)$ точка A^* лежит на дуге AB экстремали (точка B имеет координаты (b, y_2)).

Если решение $u = u(x)$ уравнения Якоби, удовлетворяющее начальному условию $u(x_1) = 0$ и $u'(x_1) = 1$, не обращается в нуль ни в одной точке полуинтервала $(a, b]$, то на дуге AB нет точек, сопряженных с A. В этом случае дугу AB экстремали можно включить в центральное поле экстремалей с центром в точке $A(a, y_1)$.

В уравнении Якоби в функциях $F_{yy}(x, y, y'), F_{yy'}(x, y, y')$ и $F_{y'y'}(x, y, y')$ вместо $y(x)$ надо подставить правую часть уравнения экстремали $y = y(x, C_0)$.

Пример 1. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^a ({y'}^2 + x^2)dx,$$

проходящей через точки $O(0,0)$ и $B(a, 3)$?

Решение. Уравнение Якоби в данном случае имеет вид $u'' = 0$. Его общее решение: $u(x) = C_1x + C_2$. Из условия $u(0) = 0$ находим, что $C_2 = 0$, так что $u = C_1x$. Ни при каком значении $a > 0$ эти решения $u(x) = C_1x$ $(C_1 \neq 0)$ в нуль не обращаются. Значит, точки, сопряженной с точкой $O(0,0)$, на дуге OB экстремали нет. Следовательно, ее можно включить в центральное поле экстремалей с центром в точке $O(0,0)$. Нетрудно проверить, что искомой экстремалью является прямая $y = \frac{3}{a}x$, которая, очевидно, включается в центральное поле экстремалей $y = C_1x$.

Пример 2. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^a \left({y'}^2 - 4y^2 + e^{-x^2}\right)dx, \quad \left(a \neq \left(n + \frac{1}{2}\pi\right)\right),$$

проходящей через точки $A(0,0)$ и $B(a, 0)$?

Решение. Уравнение Якоби имеет вид $u'' + 4u = 0$. Его общее решение: $u(x) = C_1\sin2x + C_2\cos2x$. Из условия $u(0) = 0$ находим, что $u(x) = C_1\sin2x$. Если $a < \frac{\pi}{2}$, то функция $u(x)$ не обращается в нуль при $0 < x \leq a$, и условие Якоби выполнено. Если $a > \frac{\pi}{2}$, то решение уравнения Якоби $u(x) = C_1\sin2x$ обращается в нуль в точке $x = \frac{\pi}{2}$, принадлежащей отрезку $(0, a]$, и на дуге экстремали $y = 0$

$(0 < x \leq a)$ находится точка, сопряженная с точкой $A(0,0)$. Таким образом, при $a > \frac{\pi}{2}$ не существует центрального поля экстремалей, включающего данную экстремаль.

Упражнение. Показать, что если подынтегральная функция функционала $J(y) = \int_a^b F(x, y')dx$ не содержит явно y, то каждая экстремаль всегда может быть включена в поле экстремалей.

Условие Якоби является *необходимым для достижения экстремума* функционала $J(y)$, т.е. на экстремали AB, реализующей экстремум, сопряженная с A точка не может лежать в промежутке $(a, b]$. Например, для функционала $J(y) = \int_0^a \left(y'^4 + 1\right)dx$, $y(0) = y(a) = 0$, минимум достигается на экстремали $y(x) \equiv 0$. На этой экстремали нет точек, сопряженных с точкой $O(0,0)$.

Пример 3. Для функционала

$$J(y) = \int\limits_0^{\frac{5}{4}\pi} \left(y^2 - y'^2\right)dx, \ \ y(0) = 0, \ \ y\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 0,$$

На экстремали $y(x) \equiv 0$ экстремум не достигается потому, что в интервале $(0, \frac{5}{4}\pi)$ лежит сопряженная с точкой $O(0,0)$ точка $O^*(\pi, 0)$. Решением уравнения Якоби $u'' + u = 0$, обращающимся в нуль при $x = 0$, является $u(x) = C\sin x$, и $u(x)$ обращается в нуль также в точке $x = \pi \in (0, \frac{5}{4}\pi)$. В самом деле, в качестве «близкой» кривой возьмем кривую $y_n(x) = \frac{1}{n^2}\sin\frac{4}{5}nx$, для которой условия $y(0) = y\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 0$ выполняются, а $y'_n = \frac{4}{5n}\cos n\frac{4}{5}x$. Тогда получим $J(0) = 0$, а $J(y_n) = \frac{5\pi}{8n^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{16}{25}\right) < 0$ при любом целом $n \geq 2$. Следовательно, экстремаль $y(x) \equiv 0$ не доставляет минимум данному функционалу, так как существуют близкие к $y(x) \equiv 0$ кривые, на которых значения функционала отрицательны. Возьмем теперь семейство кривых $\tilde{y}_n(x) = \frac{1}{n}\sin\frac{4}{5}x$, обладающих близостью любого порядка к кривой $y(x) \equiv 0$. Поскольку $J(\tilde{y}_n) = \frac{9\pi}{40n^2} > 0$ экстремаль, $y(x) \equiv 0$ не доставляет и максимума данному функционалу.

10. Достаточные условия экстремума функционала

Рассматривается простейшая вариационная задача для функционала [4]

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx, \quad (10.1)$$

$$y(x_1) = y_1 \quad y(x_2) = y_2. \quad (10.2)$$

10.1. Достаточные условия Вейерштрасса

Функцией Вейерштрасса $E(x, y, p, y')$ называется функция, определяемая равенством $E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - -(y' - p)F_p(x, y, p)$, где $p = p(x, y)$ – наклон поля экстремалей рассматриваемой вариационной задачи в точке (x, y).

Кривая C доставляет слабый экстремум функционалу (10.1) если:

1) *кривая C является экстремалью функционала (10.1), удовлетворяющей граничным условиям (10.2), т.е. является решением уравнения Эйлера для функционала (10.1), удовлетворяющим условиям (10.2);*

2) *экстремаль C может быть включена в поле экстремалей. В частности, это будет, если выполнено условие Якоби;*

3) *функция Вейерштрасса $E(x, y, p, y')$ должна сохранять знак во всех точках (x, y), близких к экстремали C, и для близких к $p(x, y)$ значений y'. Функционал $J(y)$ будет иметь максимум на C, если $E \leq 0$, и минимум, если $E \geq 0$.*

Кривая C доставляет сильный экстремум функционалу (10.1), если:

1) *кривая C является экстремалью функционала (10.1), удовлетворяющей граничным условиям (10.2);*

2) *экстремаль C может быть включена в поле экстремалей;*

3) *функция Вейерштрасса $E(x, y, p, y')$ сохраняет знак во всех точках (x, y), близких к экстремали C, и для произвольных значений y'. При $E \leq 0$ будет максимум, а при $E \geq 0$ – минимум.*

З а м е ч а н и е. Условие Вейерштрасса необходимо для наличия экстремума в следующем смысле: если в точках экстремали для некоторых значений y' функция E имеет противоположные знаки, то сильный экстремум не достигается. Если это свойство имеет место при сколь угодно близких к p значениях y', то не достигается и слабый экстремум.

Пример 1. Исследовать на экстремум функционал

$$J(y)=\int_0^1 \left(y'^3+y'\right)dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=2.$$

Решение. Уравнение Эйлера для данного функционала имеет вид $y'y''=0$, так что экстремалями являются прямые $y(x)=C_1x+C_2$. Экстремалью, удовлетворяющей заданным граничным условиям, является прямая $y=2x$. Наклон поля в точках этой экстремали $p=2$. Данная экстремаль $y=2x$ включается в центральное поле экстремалей $y=Cx$ с центром в точке $O(0{,}0)$. Составляем функцию Вейерштрасса:

$$E(x,y,p,y')=y'^3+y'-p^3-p-(y'-p)(3p^2+1)=$$
$$=\ (y'-p)^2(y'+2p).$$

Первый множитель всегда неотрицателен при любых y', а второй положителен при значениях y', близких к 2. Следовательно, выполнены все условия существования слабого минимума. Однако, как легко видеть, если $y'<-4$, то функция E будет уже отрицательной и достаточное условие сильного экстремума не выполняется, так как в условиях сильного экстремума требуется, чтобы функция Вейерштрасса сохраняла знак при любых значениях y'. Учитывая замечание о необходимости, заключаем, что сильного экстремума в данном случае нет.

Пример 2. Исследовать на экстремум функционал

$$J(y)=\int_0^1 (x+2y+\frac{1}{2}y'^2)dx\,,\qquad y(0)=0,\qquad y(1)=0.$$

Решение. Уравнение Эйлера для этого функционала имеет вид $y''=2$. Экстремалями являются параболы $y=x^2+C_1x+C_2$. Экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям, есть $y=x^2-x$. Составляем уравнение Якоби: $\frac{d}{dx}(u')=0$ или $u''=0$. Его общее решение $u(x)=C_1x+C_2$. Условие $u(0)=0$ дает $C_2=0$, а так как $u(x)=C_1x$ при $C_1\neq 0$ нигде на отрезке $(0{,}1]$ в нуль не обращается, то условие Якоби выполняется и, значит, экстремаль $y=x^2-x$ можно включить в центральное поле экстремалей с центром в точке $O(0,0)$.

Функция Вейерштрасса $E(x,y,p,y') = \frac{1}{2}(y'-p)^2$. Отсюда видно, что для произвольных значений y' будет $E(x,y,p,y') \geq 0$. Следовательно, на экстремали $y = x^2 - x$ данный функционал достигает сильного минимума.

10.2. Достаточные условия Лежандра

Пусть функция $F(x,y,y')$ имеет непрерывную частную производную $F_{y'y'}(x,y,y')$ и экстремаль C включена в поле экстремалей.

Если на экстремали C $F_{y'y'} > 0$, то на кривой C достигается слабый минимум; если $F_{y'y'} < 0$ на экстремали C, то на ней достигается слабый максимум функционала (10.1). Эти условия называются *усиленными условиями Лежандра.*

В том случае, когда $F_{y'y'}(x,y,y') \geq 0$ в точках (x,y), близких к экстремали C, при произвольных значениях y', то имеем сильный минимум, а в случае, когда для указанных значений аргументов $F_{y'y'}(x,y,y') \leq 0$, – сильный максимум.

Пример 3. Исследовать на экстремум функционал

$$J(y) = \int_0^1 \left(y'^3 - \alpha y'\right)dx, \;\; y(0) = 0, \;\; y(1) = -2.$$

(α – любое действительное число).

Решение. Так как подынтегральная функция зависит только от y', то экстремалями являются прямые $y = C_1 x + C_2$. Экстремалью, удовлетворяющей граничным условиям, будет прямая $y = -2x$, которая может быть включена в центральное поле экстремалей $y = Cx$. На этой экстремали наклон поля $p = -2$. Далее находим $F_{y'y'} = 6y'$. На данной экстремали $F_{y'y'} = -12 < 0$, т.е. на линии $y = -2x$ достигается слабый максимум функционала. При произвольных значениях y' знак $F_{y'y'}$ не сохраняется, следовательно, достаточные условия сильного максимума не выполняются.

Функция Вейерштрасса $E(x,y,p,y')$ в данном случае

$$E(x,y,p,y') = (y'-p)^2(y'+2p)$$

и при некоторых значениях y' она имеет противоположные знаки. Учитывая замечание о необходимости, заключаем, что сильного максимума нет.

Пример 4. Исследовать на экстремум функционал

$$J[y]=\int_0^2\left(e^{y'}+3\right)dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(2)=1.$$

Решение. Экстремалями являются прямые $y=C_1x+C_2$. Экстремалью, удовлетворяющей граничным условиям, является прямая $y=\frac{x}{2}$. Она может быть включена в центральное поле экстремалей $y=Cx$. В данном случае $F_{y'y'}(x,y,y')=e^{y'}>0$ при любых значениях y'. Следовательно, на экстремали $y=\frac{x}{2}$ имеет сильный минимум.

Пример 5. Исследовать на экстремум функционал

$$J(y)=\int_0^a\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(a)=y_2.$$

Решение. Подынтегральная функция не зависит явно от x, следовательно,

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-\frac{{y'}^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+{y'}^2}}=\frac{1}{\sqrt{C_1}},$$

откуда $y\left(1+{y'}^2\right)=C_1>0$. Положим $y'=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$, тогда $y=C_1\sin^2\frac{t}{2}=\frac{C_1}{2}(1-\cos t)$. Далее,

$$dx=\frac{dy}{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}=\frac{C_1\sin t dt}{2\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}=C_1\sin^2\frac{t}{2}dt.$$

Интегрируя получим

$$x=C_1\int\frac{(1-\cos t)dt}{2}=\frac{C_1}{2}(t-\sin t)+C_2.$$

Итак, полагая $\frac{C_1}{2}=\tilde{C}_1>0$, находим, что экстремалями являются циклоиды, параметрические уравнения которых имеют вид

$$\begin{cases} x = \tilde{C}_1(t - \sin t) + C_2, \\ \quad y = \tilde{C}_1(1 - \cos t). \end{cases}$$

Из условия $y(0) = 0$ находим, что $C_2 = 0$. Пучок циклоид

$$\begin{cases} x = \tilde{C}_1(t - \sin t), \\ y = \tilde{C}_1(1 - \cos t) \end{cases}$$

образует центральное поле с центром в точке $O(0,0)$, включающее экстремаль

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t), \end{cases}$$

где R определено из условия прохождения циклоиды через вторую граничную точку $B(a, y_2)$ при условии $a < 2\pi R$. Поскольку

$$F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}(1 + y'^2)^{3/2}} > 0$$

на циклоиде

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t), \end{cases}$$

при условии $R > \frac{a}{2\pi}$ данный функционал имеет сильный минимум.

11. Интегральный функционал, зависящий от нескольких функций

Ограничимся вначале случаем двух функций [3]:

$$J(y, z) = \int_a^b F\big(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\big)dx. \qquad (11.1)$$

Ищем экстремум функционала (11.1) на множестве пар функций $y, z \in C^2(a, b)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(a) = A_1, \; y(b) = B_1, \; z(a) = A_2, \; z(b) = B_2\,. \qquad (11.2)$$

Пусть дважды непрерывно дифференцируемые на $[a, b]$ функции $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют граничным условиям (11.2) и доставляют экстремум функционалу (11.1). Рассмотрим две близкие к y и z функции $y(x)+\alpha h_1(x)$ и $z(x)+\alpha h_2(x)$, равные нулю на концах промежутка $[a,b]$. Подставив их в интеграл (11.1), получим функцию переменной α:

$$\varphi(\alpha)=\int_a^b F(x, y(x)+\alpha h_1(x), y'(x)+\alpha h'_1(x), z(x)+\alpha h_2(x), z'(x)+$$
$$+\alpha h'_2(x))dx.$$

В силу нашего предположения о паре функций y и z функция $\varphi(\alpha)$ имеет экстремум при $\alpha=0$. Поэтому необходимо, чтобы

$$\varphi'(0)=\frac{1}{\alpha}\delta J(h_1,h_2)=\int_a^b\left(F_y h_1+F_z h_2+F_{y'}h'_1+F_{z'}h'_2\right)dx=0.$$

Преобразуем интеграл в правой части последнего равенства интегрированием по частям:

$$\int_a^b\left(\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)h_1+\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)h_2\right)dx+F_{y'}h_1|_a^b+F_{z'})h_2|_a^b=0.$$

Так как внеинтегральные члены обращаются в нуль, а каждую из функций h_1 и h_2 можно выбрать тождественно равной нулю, необходимо, чтобы функции $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяли системе дифференциальных уравнений

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0,\qquad F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}=0$$

и граничным условиям (11.2).

Для интегрального функционала, зависящего от n функций $y_1(x),\dots,y_n(x)$, т.е. от вектор-функции $\vec{y}(x)$,

$$J(\vec{y})=\int_a^b F(x,y_1(x),\dots,y_n(x),y'_1(x),\dots,y'_n(x))dx$$

необходимые условия экстремума будут выражаться системой n уравнений

$$F_{y_k}-\frac{d}{dx}F_{y'_k}=0\ \ (k=1,\dots,n)$$

и граничными условиями

$$y_k(a) = A_k,\ \ y_k(b) = B_k \ \ (k = 1, \dots, n).$$

Первую вариацию этого функционала можно представить в виде

$$\frac{1}{\alpha}\delta J(\vec{h}) = \sum_{k=1}^{n} F_{y'_k} h_k\Big|_a^b + \int_a^b \sum_{k=1}^{n} (F_{y_k} - \frac{d}{dx} F_{y'_k}) h_k dx,$$

где $\vec{h}(x) = \big(h_1(x), \dots, h_n(x)\big)$.

Пример 1. Найти стационарные точки (экстремали) функционала

$$J(y,z) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 + 2yz)dx,$$
$$y(0) = 0, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, z(0) = 0, z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Система дифференциальных уравнений Эйлера имеет вид

$$y'' - z = 0, \qquad z'' - y = 0.$$

Исключая одну из неизвестных функций, например z, получаем

$$y^{IV} - y = 0.$$

Интегрируем это линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x;$$
$$z = y''; z = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x.$$

Исходя из граничных условий, находим $C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 0, C_4 = 1$. Следовательно, $y = \sin x$, $z = -\sin x$.

Пример 2. Найти стационарные точки (экстремали) функционала

$$J(y,z) = \int_{x_1}^{x_2} f(y', z')dx.$$

Система уравнений Эйлера имеет вид

$$f_{y'y'} y'' + f_{y'z'} z'' = 0;\ f_{y'z'} y'' + f_{z'z'} z'' = 0,$$

откуда, считая $f_{y'y'} + f_{z'z'} - \left(f_{y'z'}\right)^2 \neq 0$, получим $y'' = 0$ и $z'' = 0$ или $y = C_1 x + C_2$, $z = C_3 x + C_4$ – семейство прямых линий в пространстве.

12. Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка

Исследуем на экстремум функционал

$$V[y] = \int_a^b F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) dx,$$

где функцию F будем считать дифференцируемой $n+2$ раза по всем аргументам. Будем предполагать, что граничные условия имеют вид

$$y(a) = y_1, y'(a) = {y'}_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = y_1^{(n-1)};$$
$$y(b) = y_2, y'(b) = {y'}_2, \dots, y^{(n-1)}(b) = y_2^{(n-1)},$$

т.е. в граничных точках заданы значения не только функции, но и ее производных до порядка $n-1$ включительно [4]. Предположим, что экстремум достигается на кривой $y = y(x)$, дифференцируемой $2n$ раз. Найдем вариацию функционала

$$\frac{1}{\alpha}\delta V = \int_a^b \left(F_y \eta + F_{y'}\eta' + \dots + F_{y^{(n)}}\eta^{(n)}\right) dx.$$

Интегрируем по частям второе слагаемое в правой части один раз:

$$\int_a^b F_{y'}\eta' dx = F_{y'}\eta\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{y'}\eta dx,$$

третье слагаемое – два раза:

$$\int_a^b F_{y''}\eta'' dx = F_{y''}\eta'\Big|_a^b - \frac{d}{dx} F_{y''}\eta\Big|_a^b + \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} F_{y''}\eta dx,$$

и т.д., последнее слагаемое – n раз:

$$\int_a^b F_{y^{(n)}}\eta^{(n)}dx =$$
$$= F_{y^{(n)}}\eta^{(n-1)}|_a^b - \frac{d}{dx}F_{y^{(n)}}\eta^{(n-2)}|_a^b + \cdots (-1)^n \int\limits_a^b \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}\eta dx.$$

Принимая во внимание граничные условия, в силу которых при $x = a$ и при $x = b$ вариации $\eta = \eta' = \cdots = \eta^{(n-1)} = 0$, окончательно получаем

$$\frac{1}{\alpha}\delta V(\eta) = \int\limits_a^b (F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \cdots + (-1)^n F_{y^{(n)}})\eta dx.$$

Так как на кривой, реализующей экстремум,

$$\frac{1}{\alpha}\delta V = \int\limits_a^b (F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \cdots + (-1)^n F_{y^{(n)}})\eta dx = 0$$

при произвольном выборе функции η и так как первый множитель под знаком интеграла является непрерывной функцией x на той же кривой $y = y(x)$, то в силу леммы Лагранжа первый множитель тождественно равен нулю:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \cdots + (-1)^n F_{y^{(n)}} \equiv 0.$$

Итак, функция $y = y(x)$, реализующая экстремум функционала

$$V(y) = \int_a^b F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right)dx,$$

должна быть решением уравнения

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \cdots + (-1)^n F_{y^{(n)}} = 0.$$

Это дифференциальное уравнение порядка $2n$ называется *уравнением Эйлера—Пуассона*, а его интегральные кривые – *экстремалями (стационарными функциями)* рассматриваемой вариационной задачи. Общее решение этого уравнения содержит $2n$ произвольных постоянных, которые могут быть, вообще говоря, определены из граничных условий

$$y(a) = y_1, y'(a) = y'_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = y_1^{(n-1)};$$

$$y(b) = y_2, y'(b) = y'_2, \dots, y^{(n-1)}(b) = y_2^{(n-1)}.$$

Пример 1. Найти допустимую экстремаль функционала

$$V(y) = \int_0^1 \left(1 + y''^2\right) dx; \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1, \;\; y(1) = 1, \;\; y'(1) = 1.$$

Уравнение Эйлера−Пуассона имеет вид $\frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0$ или $y^{IV} = 0$; его общее решение: $y = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$. Принимая во внимание граничные условия, получаем

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = 0, \qquad C_3 = 1, \qquad C_4 = 0.$$

Итак, экстремум может достигаться лишь на прямой $y = x$.

Пример 2. Определить экстремаль функционала

$$V(y) = \int_{-l}^{l} (\tfrac{1}{2}\mu y''^2 + \rho y) dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям

$$y(-l) = 0, \qquad y'(-l) = 0, \qquad y(l) = 0, \qquad y'(l) = 0.$$

К этой вариационной задаче сводится нахождение оси изогнутой упругой цилиндрической балки, заделанной на концах. Если балка однородна, то ρ и μ постоянны и уравнение Эйлера−Пуассона имеет вид

$$\rho + \frac{d^2}{dx^2}(\mu y'') = 0,$$

откуда $y = -\frac{\rho x^4}{24\mu} + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$. Учитывая граничные условия, окончательно находим $y = -\frac{\rho}{24\mu}(x^4 - 2l^2x^2 + l^4)$ или $y = -\frac{\rho}{24\mu}(x^2 - l^2)^2$.

13. Случай кратных интегралов

Приведем вывод необходимого условия экстремума для кратного интеграла [3]. Рассмотрим двойной интеграл

$$J = \iint F(x, y, u, u_x, u_y) dxdy, \quad (x, y) \in B, \tag{13.1}$$

где u_x, u_y – частные производные функции $u(x, y)$, а B – некоторая конечная область на плоскости xOy. Считается, что функция $F(x, y, u, p, q)$ имеет непрерывные производные до второго порядка, если точка (x, y, u) находится внутри некоторой трехмерной области $\mathcal{D}$, а p и q – любые ($p = u_x; q = u_y$).

Ищем поверхность $u = u(x, y)$, лежащую внутри $\mathcal{D}$, с границей λ, однозначно проектирующуюся на плоскость xOy в виде области B с границей l. Предполагаем, что $u(x, y)$ имеет непрерывные производные до второго порядка в B.

Составляем близкие функции $u(x, y) + \alpha\eta(x, y)$, где $\eta(x, y)$ – произвольная функция, обращающаяся в нуль на l. Подставляя эту функцию в интеграл (13.1), дифференцируя по α и полагая $\alpha = 0$, получаем выражение первой вариации функционала:

$$\delta J = \alpha \iint (F_u \eta + F_{u_x} \eta_x + F_{u_y} \eta_y) dxdy.$$

Преобразуем последние два слагаемых, с помощью известной формулы Римана

$$\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint Pdx + Qdy$$

следующим образом:

$$\iint \left(F_{u_x}\eta_x + F_{u_y}\eta_y\right) dxdy = \iint \{\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta F_{u_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\eta F_{u_y})\} dxdy -$$
$$- \iint \eta(\frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y}) dxdy = \oint (\eta F_{u_x} dy - \eta F_{u_y} dx) - \iint \eta(\frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y}) dxdy.$$

Получим выражение первой вариации:

$$\delta J = \oint \delta u \left(F_{u_x} dy - F_{u_y} dx\right) - \iint (F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y}) \delta u dx dy \quad (13.2)$$
$$\left(\delta u = \alpha \eta(x, y)\right).$$

Для экстремума необходимо, чтобы эта первая вариация обращалась в нуль, или, принимая во внимание, что $\eta(x, y)$ на l равно нулю, мы можем утверждать, что двойной интеграл, стоящий в правой части (13.2), должен равняться нулю, а отсюда в силу леммы Лагранжа мы получаем для искомой функции $u(x, y)$, дающей экстремум функционалу (13.1), *уравнение Эйлера-Остроградского*:

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} = 0. \quad (13.3)$$

14. Вариационный принцип в механике

Основным вариационным принципом в механике является *принцип стационарного действия*, утверждающий, что среди возможных, т.е. совместимых со связями, движений системы материальных точек в действительности осуществляется движение, дающее стационарное значение (т.е. значение, соответствующее аргументу, для которого вариация функционала равна нулю) интегралу

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt,$$

где T – кинетическая, а U – потенциальная энергия системы.

Применим этот принцип к нескольким задачам механики [3].

Пример 1. Дана система материальных точек с массами m_i $(i = 1, \dots, n)$ и координатами (x_i, y_i, z_i), на которую действуют силы $\vec{F}_i$, обладающие силовой функцией (потенциалом) − U, зависящей только от координат:

$$F_{x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}; \;\; F_{y_i} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}; \;\; F_{z_i} = -\frac{\partial U}{\partial z_i},$$

где $F_{x_i}, F_{y_i}, F_{z_i}$ – координаты вектора $\vec{F}_i$, действующего на точку (x_i, y_i, z_i).

Потенциальная энергия системы равна U, а кинетическая $T = 1/2\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$. Система уравнений Эйлера для интеграла

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - U)dt$$

имеет вид

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = 0;\ -\frac{\partial U}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} = 0;\ -\frac{\partial U}{\partial z_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} = 0,$$

или

$$m_i\ddot{x}_i - F_{x_i} = 0;\ \ m_i\ddot{y}_i - F_{y_i} = 0;\ \ m_i\ddot{z}_i - F_{z_i} = 0; (i = 1, \dots, n).$$

Если бы движение было подчинено еще некоторой системе независимых связей

$$\varphi_j(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n) = 0\ \ (j = 1, \dots, m; m < 3n)$$

то из уравнений связей можно было бы выразить все $3n$ переменных через $3n - m$ новых, уже независимых, координат $q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}$. Тогда T и U можно было бы также рассматривать как функции независимых обобщенных координат и времени:

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}, \dot{q}_1, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3n-m}, t),$$
$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}, t)$$

и система уравнений Эйлера имела бы вид

$$\frac{\partial(T - U)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 0\ \ \ (i = 1, \dots, 3n - m).$$

Пример 2. Выведем дифференциальное уравнение свободных колебаний струны. Поместим начало координат в один из ее концов. Струна в состоянии покоя под влиянием натяжения расположена вдоль некоторой прямой, по которой направим ось абсцисс. Отклонение от положения равновесия $u(x, t)$ будет функцией абсциссы x и времени t.

Потенциальная энергия U элемента абсолютно гибкой струны пропорциональна растяжению струны. Участок струны dx в деформированном состоянии, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, имеет длину $ds = \sqrt{1 + {u'_x}^2}dx$, и, следовательно, удлинение элемента равно $\left(\sqrt{1 + {u'_x}^2} - 1\right)dx$. По формуле Тейлора $\sqrt{1 + {u'_x}^2} - 1 \cong \frac{1}{2}{u'_x}^2$. Считая u'_x малым и пренебрегая более высокими степенями u'_x получим, что потенциальная энергия элемента равна $\frac{1}{2}k{u'_x}^2dx$, где k – множитель пропорциональности, а потенциальная энергия всей струны равна

$$\frac{1}{2}\int_0^l k{u'_x}^2dx.$$

Кинетическая энергия струны

$$\frac{1}{2}\int_0^l \rho{u'_t}^2dx,$$

где ρ – плотность. Интеграл $\int_{t_1}^{t_2}(T - U)dt$ в данном случае имеет вид

$$V = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l(\frac{1}{2}\ \rho{u'_t}^2 - \frac{1}{2}\ k{u'_x}^2)dxdt.$$

Уравнение движения струны будет уравнением Эйлера–Остроградского для функционала V:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho{u'}_t) - \frac{\partial}{\partial x}(k{u'}_x) = 0.$$

Если струна однородная, то ρ и k постоянные, и уравнение колеблющейся струны упрощается:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

15. Изопериметрическая задача

В простейшей задаче вариационного исчисления, которую мы рассматривали выше, класс допустимых линий, помимо тех или иных требований гладкости, определялся условиями, задаваемыми на концах этих линий. Однако ряд приложений вариационного исчисления приводит к задачам, в которых на допустимые кривые, кроме граничных условий, накладываются условия совсем иного типа. Рассмотрим в качестве примера так называемую *изопериметрическую задачу* [3]. Эта задача формулируется следующим образом.

Среди всех кривых $y = y(x) \in C^1[x_1, x_2]$, вдоль которых функционал

$$K[y] = \int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y')dx$$

принимает заданное значение l, определить ту, для которой функционал

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$$

принимает экстремальное значение.

Относительно функций F и G предполагаем, что они имеют непрерывные частные производные первого и второго порядков при $x_1 \leq x \leq x_2$ и при произвольных значениях переменных y, y'.

Теорема Эйлера. Если кривая $y = y(x)$ дает экстремум функционалу

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx \tag{15.1}$$

при условиях

$$K[y] = \int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y')dx = l, \;\; y(x_1) = y_1, \;\; y(x_2) = y_2, \tag{15.2}$$

и если $y = y(x)$ не является экстремалью функционала K, то существует константа λ такая, что кривая $y = y(x)$ есть экстремаль функционала

$$L = \int_{x_1}^{x_2} (F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y'))dx. \tag{15.3}$$

Пример 1. Исследуем на экстремум функционал

$$S[y] = \int_{x_1}^{x_2} y(x)dx, \;\; y(x_1) = y_1, \;\; y(x_2) = y_2,$$

при изопериметрическом условии

$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}dx=l.$$

Составляем сначала вспомогательный функционал:

$$L=\int_{x_1}^{x_2}(y+\lambda\sqrt{1+y'^2})dx.$$

Так как подынтегральная функция не содержит x, то уравнение Эйлера для L имеет первый интеграл

$$y+\lambda\sqrt{1+y'^2}-\frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1,$$

откуда

$$y-C_1=\frac{-\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Вводим параметр t, полагая $y'=\mathrm{tg}t$; тогда

$$y-C_1=-\lambda\mathrm{cos}t;\ \ dx=\frac{dy}{\mathrm{tg}t}=\frac{\lambda\mathrm{sin}tdt}{\mathrm{tg}t}=\lambda\mathrm{cos}tdt, x=\lambda sint+C_2.$$

Итак, уравнение экстремалей в параметрической форме имеет вид

$$\begin{cases}x-C_2=\lambda sint,\\ y-C_1=\lambda cost.\end{cases}$$

Исключив t, получим семейство окружностей

$$(x-C_2)^2+(y-C_1)^2=\lambda^2.$$

Постоянные C_1, C_2 и λ определяются из условий

$$y(x_1)=y_1,\ \ y(x_2)=y_2 \text{ и } \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}dx=l.$$

Геометрически задача свелась к проведению дуги окружности длиной l, проходящей через две точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$. Эта задача имеет решение и притом единственное, если только l больше расстояния $\rho(A,B)$ между данными точками и меньше $\pi\rho(A,B)$.

Пример 2. Найти форму абсолютно гибкого, нерастяжимого однородного каната длиной l, подвешенного в точках $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$.

Так как в положении равновесия центр тяжести должен занимать наиболее низкое положение, то задача сводится к нахождению минимума статического момента P относительно оси Ox, которая предполагается направленной горизонтально.

Исследуем на экстремум функционал $P = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ при условии $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l$.

Составим вспомогательный функционал $L = \int_{x_1}^{x_2} (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx$, для которого уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$(y+\lambda)\sqrt{1+{y'}^2} - \frac{(y+\lambda){y'}^2}{\sqrt{1+{y'}^2}} = C_1,$$

откуда $y+\lambda = C_1\sqrt{1+{y'}^2}$. Вводим параметр, полагая $y' = \mathrm{sh}t$. Тогда $y+\lambda = C_1\mathrm{ch}t$ и $dx = \frac{dy}{y'} = C_1 dt$, следовательно, $x = C_1 t + C_2$. Исключив параметр t, получим $y+\lambda = C_1 ch\frac{x-c_2}{C_1}$ – семейство цепных линий.

16. Вариационная задача Лагранжа на условный экстремум при голономных и неголономных связях

Задача ставится так. Найти экстремум функционала

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F\big(x, y_1, \dots, y_n, {y'}_1, \dots, {y'}_n\big)dx, \qquad (16.1)$$
$$y_j(x_1) = y_{j1},\ \ y_j(x_2) = y_{j2}\ \ (j = 1, \dots, n)$$

при наличии условий

$$\varphi_i(x, y_1, \dots, y_n) = 0\ \ \ (i = 1, \dots, m; m < n), \qquad (16.2)$$

которые считаются независимыми.

Теорема. *Функции $y_1, \dots, y_n$, реализующие экстремум функционала (16.1) при наличии связей (16.2), удовлетворяют при соответствующем выборе множителей $\lambda_i(x)$ $(i = 1, \dots, m)$ уравнениям Эйлера для функционала*

$$J^* = \int_{x_1}^{x_2} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i \right) dx.$$

Обозначим для краткости $F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i = \Phi(x, y_1, \dots, y_n)$. Тогда функции $\lambda_i(x)$и $y_i(x)$ определятся из уравнений Эйлера

$$\Phi_{y_j} - \frac{d}{dx} \Phi_{y'_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

и уравнений связей $\varphi_i(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$.

Предположим теперь, что уравнения связей являются дифференциальными уравнениями

$$\varphi_i(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

В механике связи такого вида называют *неголономными*, а связи вида (2) – *голономными*. Сформулированная выше теорема остается верной и в случае неголономных связей.

Пример. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(1, -1, 0)$ и $B(2, 1, -1)$, лежащими на поверхности $15x - 7y + z - -22 = 0$.

Решение. Расстояние между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ на поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$ определяется по формуле

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)} dx.$$

Надо найти минимум l при условии $\varphi(x, y, z) = 0$. В нашем случае

$$x_1 = 1, \ x_2 = 2, \ \varphi(x, y, z) = 15x - 7y + z - 22.$$

Составим вспомогательный функционал

$$J^* = \int_1^2 \left(\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x)(15x - 7y + z - 22) \right) dx$$

И выпишем уравнение Эйлера для него:

$$\lambda(x)(-7) - \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+{y'}^2+{z'}^2}}\right) = 0, \tag{16.3}$$

$$\lambda(x) - \frac{d}{dx}\left(\frac{z'}{\sqrt{1+{y'}^2+{z'}^2}}\right) = 0. \tag{16.4}$$

Решим систему уравнений (16.3) – (16.4), учитывая условие связи

$$15x - 7y + z - 22 = 0. \tag{16.5}$$

Искомые функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$y(1) = -1,\ y(2) = 1;\ \ z(1) = 0, \quad z(2) = -1. \tag{16.6}$$

Умножив (16.4) на 7 и сложив с (16.3), получим

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'+7z'}{\sqrt{1+{y'}^2+{z'}^2}}\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{y'+7z'}{\sqrt{1+{y'}^2+{z'}^2}} = \mathrm{C}_1. \tag{16.7}$$

Подставляя значение z', найденное из (16.5), в (16.7) и решая полученное дифференциальное уравнение, найдем $y(x) = \tilde{C}_1 x + C_2$. Граничные условия (6) дают $\tilde{C}_1 = 2,\ C_2 = -3$, так что

$$y(x) = 2x - 3. \tag{16.8}$$

Из (16.5) с учетом (16.9) находим, что $z(x) = 1 - x$. Из (16.3) или (16.4) получаем $\lambda(x) \equiv 0$. Искомое расстояние

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + {y'}^2(x) + {z'}^2(x)}dx = \sqrt{6}.$$

Этот результат получается сразу из очевидных геометрических соображений.

17. Форма первой вариации в общем случае подвижных концов

Будем считать, что основная кривая $y = y(x)$, для которой вычисляется вариация интегрального функционала, содержится в однопараметрическом семействе $y = y(x, \alpha)$ при $\alpha = 0$, т.е. $y(x) = y(x, 0)$. При этом полагаем, что функция $y(x, \alpha)$ двух переменных имеет непрерывные производные до второго порядка включительно. Пределы интегрирования также зависят от параметра α:

$$\varphi(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} F(x, y(x, \alpha), y_x(x, \alpha) dx. \qquad (17.1)$$

Обозначим $a(0) = x_0$ и $b(0) = x_1$ так, что

$$\varphi(0) = J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, y(x), y'(x)\big) dx. \qquad (17.2)$$

Следуя Лагранжу, в соответствии с общим определением первой вариации как произведения производной по α при $\alpha = 0$ на α, можно написать [3]:

$$\delta x_0 = \frac{da(0)}{d\alpha}\alpha;\ \delta x_1 = \frac{db(0)}{d\alpha}\alpha;\ \delta y = \frac{\partial y(x,0)}{\partial\alpha}\alpha;$$

$$\delta y' = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial x}\right)\Bigg|_{\alpha=0}\alpha = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right)\Bigg|_{\alpha=0}\alpha.$$

Чтобы получить выражение первой вариации функционала (17.2) на кривой $y = y(x)$, берем первую производную от интеграла (17.1) по α, полагаем в ней $\alpha = 0$ и умножаем на α:

$$\delta J = F\big(x_1, y(x_1), y'(x_1)\big)\delta x_1 -$$
$$-F\big(x_0, y(x_0), y'(x_0)\big)\delta x_0 + \int_{x_0}^{x_1}\big(F_y \delta y + F_{y'}\delta y'\big)dx. \qquad (17.3)$$

Интегрированием по частям получим

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}\delta y' dx = F_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1))\delta y(x_1) -$$
$$-F_{y'}\big(x_0, y(x_0), y'(x_0)\big)\delta y(x_0) - \int_{x_0}^{x_1}\delta y(x)\frac{d}{dx}F_{y'} dx \qquad (17.4)$$

Для граничных значений вариаций функции y введем обозначения

$$\delta y(x_0) = \frac{\partial y(x_0,0)}{\partial \alpha}\alpha = (\delta y)_0,$$

$$\delta y(x_1) = \frac{\partial y(x_1,0)}{\partial \alpha}\alpha = (\delta y)_1.$$

Ординаты левого и правого концов семейства кривых $y = y(x, \alpha)$ обозначим $y_0 = y(a(\alpha), \alpha)$ и $y_1 = y(b(\alpha), \alpha)$ соответственно.

При изменении α будут меняться оба аргумента функции $y(x, \alpha)$, а не только второй, как это было при определении $(\delta y)_0$ и $(\delta y)_1$. Найдем теперь первую вариацию левого конца:

$$\delta y_0 = (\frac{d}{d\alpha} y(a(\alpha), \alpha) \Big|_{\alpha=0} \alpha = \left(\frac{\partial y}{\partial a}\frac{da}{d\alpha}\right) \Big|_{\alpha=0} \alpha + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) \Big|_{\alpha=0} \alpha =$$
$$= y'(x_0)\delta x_0 + (\delta y)_0 = y'_0 \delta x_0 + (\delta y)_0. \qquad (17.6)$$

Аналогично получим выражение для вариации ординаты правого конца:

$$\delta y_1 = y'_1 \delta x_1 + (\delta y)_1. \qquad (17.7)$$

Из (17.6) и (17.7) выразим граничные значения вариации функции y через вариации концов кривой:

$$(\delta y)_0 = \delta y_0 - y'_0 \delta x_0, \qquad (17.8)$$

$$(\delta y)_1 = \delta y_1 - y'_1 \delta x_1. \qquad (17.9)$$

Окончательное выражение для первой вариации интеграла (17.2) дает подстановка (17.8) и (17.9) в (17.4), а (17.4) в (17.3):

$$\delta J = \left(F(x_1, y_1, y'_1) - F_{y'}(x_1, y_1, y'_1)\right)\delta x_1 + F_{y'}(x_1, y_1, y'_1)\delta y_1 -$$
$$-\left(F(x_0, y_0, y'_0) - F_{y'}(x_0, y_0, y'_0)\right)\delta x_0 - F_{y'}(x_0, y_0, y'_0)\delta y_0 +$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'})\delta y dx. \qquad (17.10)$$

Для интеграла, зависящего от n функций,

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y'_1, \ldots, y_n, y'_n) dx, \qquad (17.11)$$

Вычисления, аналогичные предыдущим, приводят к следующей общей *формуле для первой вариации*:

$$\delta J = \left(F - \sum_{i=1}^{n} y'_i F_{y'_i}\right)\Big|_{x = x_1} \delta x_1 + \sum_{i=1}^{n} (F_{y'_i})\Big|_{x = x_1} \delta y_i^{(1)} -$$

$$-\left(F - \sum_{i=1}^{n} y'_i F_{y'_i}\right)\Big|_{x = x_0} \delta x_0 - \sum_{i=1}^{n} (F_{y'_i})\Big|_{x = x_0} \delta y_i^{(1)} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \int_{x_0}^{x_1} (F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i}) \delta y_i dx, \quad (17.12)$$

где $\delta x_0, \delta x_1, \delta y_i^{(0)}, \delta y_i^{(1)}$ -- вариации координат концов кривой.

18. Условие трансверсальности

Рассмотрим интегральный функционал [3]

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, y(x), y'(x)\big) dx, \quad (18.1)$$

определенный на кривых $y = y(x)$, левый конец которых закреплен $y(x_0) = y_0$, а правый может перемещаться по кривой l. Кривая l может быть графиком некоторой функции $y = \bar{y}(x)$ или задана в неявной форме $\varphi(x, y) = 0$.

Если некоторая кривая $y = y(x)$ дает экстремум функционалу, то первая вариация на этой кривой должна обратиться в нуль:

$$\delta J = (F\big(x_1, y(x_1), y'(x_1)\big) - y'(x_1) F_{y'}\big(x_1, y(x_1), y'(x_1)\big) \delta x_1 +$$

$$+F_{y'}\big(x_1, y(x_1), y'(x_1)\big) \delta y_1 + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) \delta y dx = 0. \quad (18.2)$$

В то же время эта кривая доставляет экстремум в задаче с закрепленными концами, а следовательно, является экстремалью, т.е. решением уравнения Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

С учетом этого условие на подвижном правом конце (x_1, y_1) принимает вид

$$(F\big(x_1, y(x_1), y'(x_1)\big) - y'(x_1) F_{y'}\big(x_1, y(x_1), y'(x_1)\big) \delta x_1 +$$

$$+F_{y'}\big(x_1, y(x_1), y'(x_1)\big) \delta y_1 = 0. \quad (18.3)$$

Здесь δx_1 и δy_1 – проекции на координатные оси перемещения вдоль касательной к кривой l в точке(x_1, y_1).

Обозначим через $\overline{y'} = \frac{\delta y_1}{\delta x_1}$ угловой коэффициент касательной к кривой l и разделим левую и правую части равенства (18.3) на δx_1:

$$F\big(x_1, y(x_1), y'(x_1)\big) - y'(x_1)F_{y'}\big(x_1, y(x_1), y'(x_1)\big) + \\ +\overline{y'}F_{y'}\big(x_1, y(x_1), y'(x_1)\big) = 0. \qquad (18.4)$$

Соотношение (18.4) обычно записывают в виде

$$F\big(x_1, y(x_1), y'(x_1)\big) - (\overline{y'} - y'(x_1))F_{y'}\big(x_1, y(x_1), y'(x_1)\big) = 0 \quad (18.5)$$

и называют условием *трансверсальности*.

Аналогичными рассуждениями можно получить условие трансверсальности на левом конце:

$$F\big(x_0, y(x_0), y'(x_0)\big) - (\overline{y'} - y'(x_0))F_{y'}\big(x_0, y(x_0), y'(x_0)\big) = 0.$$

При заданной кривой l в неявной форме $\varphi(x, y) = 0$ условие трансверсальности получим из системы двух уравнений:

$$d\varphi(x, y) = \varphi_x \delta x + \varphi_y \delta y = 0,$$

$$\big(F - y'F_{y'}\big)\delta x + F_{y'}$$

в виде

$$\frac{F - y'F_{y'}}{\varphi_x} = \frac{F_{y'}}{\varphi_y}. \qquad (18.6)$$

Если обозначить $F_{y'} = p$, $F - y'p = -H$, то условие трансверсальности (18.6) примет вид

$$\frac{-H}{\varphi_x} = \frac{p}{\varphi_y}. \qquad (18.7)$$

Перейдем к рассмотрению интегрального функционала, определенного на кривых в трехмерном пространстве:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z')dx.$$

Один из концов кривых

$$\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \end{cases} (x_0 \le x \le x_1)$$

закреплен, а другой может двигаться по поверхности с уравнением $\varphi(x, y, z) = 0$.

Первая вариация такого функционала при свободном правом конце:

$$\delta J = \left(F - y'F_{y'} - z'F_{z'}\right)\delta x_1 + F_{y'}\delta y_1' + F_{z'}\delta z_1' + \int_{x_0}^{x_1}(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\delta y dx + \int_{x_0}^{x_1}(F_z - \frac{d}{dx}F_{z'})\delta z dx, \quad (18.8)$$

а условие трансверсальности задается соотношением

$$\left(F - y'F_{y'} - z'F_{z'}\right)\delta x_1 + F_{y'}\delta y_1' + F_{z'}\delta z_1' = 0, \quad (18.9)$$

где $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$ – проекции на координатные оси произвольного перемещения вдоль касательной плоскости к поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$ в точке (x_1, y_1, z_1). Левая часть равенства (18.9) есть скалярное произведение вектора перемещения

$$\delta x_1 \vec{\imath} + \delta y_1 \vec{\jmath} + \delta z \vec{k}$$

на вектор

$$\left(F - y'F_{y'} - z'F_{z'}\right)\vec{\imath} + F_{y'}\vec{\jmath} + F_{z'}\vec{k}. \quad (18.10)$$

Эти векторы ортогональны, следовательно, компоненты вектора (18.10) пропорциональны компонентам нормали к поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$ в точке (x_1, y_1, z_1):

$$\frac{\left(F - y'F_{y'} - z'F_{z'}\right)}{\varphi_x} = \frac{F_{y'}}{\varphi_y} = \frac{F_{z'}}{\varphi_z}.$$

Если ввести обозначения $F - y'F_{y'} - z'F_{z'} = -H, F_{y'} = p_1, F_{z'} = p_2$, то условие трансверсальности примет вид

$$\frac{-H}{\varphi_x} = \frac{p_1}{\varphi_y} = \frac{p_2}{\varphi_z}.$$

19. Канонический вид уравнения Эйлера. Канонические переменные

Функционалу

$$J(y) = \int_a^b F\big(x, y(x), y'(x)\big)dx$$

отвечает уравнение Эйлера

$$F_y\big(x, y(x), y'(x)\big) - \frac{d}{dx}F_{y'}\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0,$$

являющееся дифференциальным уравнением второго порядка.

При рассмотрении условия трансверсальности были введены следующие величины: $p = F_{y'}(x, y, y'), H = -F(x, y, y') + y'p$.

Выразим из равенства $p = F_{y'}(x, y, y')$ величину y' через x, y и p. Величины x, y, p примем за новые переменные вместо x, y, y'. Переход от старых переменных к новым локально возможен, если $F_{y'y'} \neq 0$.

Введем в рассмотрение новую функцию:

$$H(x, y, p) = -F\big(x, y, y'(x, y, p)\big) + y'\big(x, y, y'(x, y, p)\big)p,$$

которую называют *функцией Гамильтона*, отвечающей функционалу

$$J(y) = \int_a^b F\big(x, y(x), y'(x)\big)dx.$$

Пользуясь инвариантностью формы первого дифференциала, найдем дифференциал функции Гамильтона из определяющего ее равенства:

$$dH = -\frac{\partial F}{\partial x}dx - \frac{\partial F}{\partial y}dy - \frac{\partial F}{\partial y'}dy' + pdy' + y'dp.$$

Поскольку $\frac{\partial F}{\partial y'} = p$, слагаемые в правой части последнего равенства, содержащие dy', сокращаются. Таким образом,

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{\partial F}{\partial x}dx - \frac{\partial F}{\partial y}dy + y'dp$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x},\ \ \frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y},\ \ \frac{\partial H}{\partial p} = y'.$$

С учетом этих равенств уравнение Эйлера $\frac{d}{dx}F_{y'} = F_y$ эквивалентно уравнениям

$$\frac{d}{dx}p = \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial y},\ \ \frac{dy}{dx} = y' = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Система двух уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dfrac{dp}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial y} \end{cases};$$

каждое из которых имеет первый порядок, называется *канонической системой* функционала

$$J(y) = \int_a^b F\big(x, y(x), y'(x)\big)dx.$$

Функционалу, определенному на вектор-функциях $\vec{y}(x) = = (y_1(x), \dots, y_n(x))$

$$j(\vec{y}) = \int_a^b F\big(x, \vec{y}(x), \vec{y}\,'(x)\big)dx,$$

отвечает система уравнений Эйлера $F_{y_i} - \frac{d}{dx}F_{y_i'} = 0\ \ (i = 1, \dots, n)$.

Выразим из равенств

$$\begin{cases} p_1 = F_{y_1'}(x, \vec{y}, \vec{y}\,'), \\ \quad\dots\dots\dots\dots \\ p_n = F_{y_n'}(x, \vec{y}, \vec{y}\,') \end{cases}$$

величины $y_1', \dots, y_n'$ через $x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n$.
Примем за новые переменные вместо прежних

$$x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y'_n.$$

Переход от старых переменных к новым возможен, если определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} F_{y_1'y_1'} & \dots & F_{y_1'y_n'} \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{y_n'y_1'} & \dots & F_{y_n'y_n'} \end{pmatrix}$$

отличен от нуля. Функция Гамильтона в данном случае определяется равенством

$$H(x,\vec{y},\vec{p}) = -F(x,\vec{y},\vec{y}'(x,\vec{y},\vec{p})) + \sum_{i=1}^{n} y_i'(x,\vec{y},\vec{p})p_i.$$

Каноническая система дифференциальных уравнений функционала имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dfrac{dp_i}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i}. \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Библиографический список

1. *Коша, А*. Вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 1983.
2. *Краснов, М.Л.*, Макаренко Г. И., Киселев А. И. Вариационное исчисление. М.: Наука, 1973.
3. *Смирнов, В.И*. Курс высшей математики. Т.IV. М.: Физматгиз, 1958.
4. *Эльсгольц, Л.Э*. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965.

Предметный указатель

брахистохрона 5
Вейерштрасса функция 32
Гамильтона функция 56
голономные связи 49
дискриминант семейства кривых 27
изопериметрическая задача 45
интеграл импульса 19
интеграл энергии 19
интегральный функционал 3
каноническая система уравнений функционала 57
лемма Лагранжа 12
локальный экстремум 9
минимальная поверхность вращения 7
наклон поля экстремалей 25
неголономные связи 49

необходимое условие экстремума 10
область определения функционала 3
общая форма первой вариации 52
первая вариация по Лагранжу 15
принцип стационарного действия 43
производная по направлению 13
простейшая вариационная задача 8
сильный локальный минимум 10
слабый локальный минимум 10
собственное поле экстремалей 25
сопряженная точка 28
трансверсальности условие 54 и 55
уравнение Эйлера 17
усиленное условие Лежандра 34
центральное поле экстремалей 25
цепная линия 24
циклоида 23
Эйлера−Остроградского уравнение 43
Эйлера−Пуассона уравнение 40
экстремаль 17
Якоби уравнение 29
Якоби условие 28

О Г Л А В Л Е Н И Е

1. Интегральный функционал 3
2. Простейший тип задач вариационного исчисления 5
2.1. Задача о брахистохроне 5
2.2. Задача о минимальной поверхности вращения 7
2.3. Простейшая вариационная задача 8
3. Сильный и слабый локальный экстремум 9
4. Необходимое условие экстремума. Лемма Лагранжа 10
5. Классическая трактовка вариации. Первая вариация и ее связь с дифференциальным уравнением Эйлера 13
6. Дифференциальное уравнение Эйлера 17
7. Поле экстремалей 25
8. Достаточное условие Якоби возможности включения экстремали в центральное поле экстремалей 28
9. Аналитическая форма условия Якоби 29
10. Достаточные условия экстремума функционала 32
10.1. Достаточные условия Вейерштрасса 32
10.2. Достаточные условия Лежандра 34
11. Интегральный функционал, зависящий от нескольких функций 36
12. Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка 39
13. Случай кратных интегралов 42
14. Вариационный принцип в механике 43
15. Изопериметрическая задача 45
16. Вариационная задача Лагранжа на условный экстремум при голономных и неголономных связях 48
17. Форма первой вариации в общем случае подвижных концов 51
18. Условие трансверсальности 53
19. Канонический вид уравнения Эйлера. Канонические переменные 56
Библиографический список 58
Предметный указатель 58

Родин Борис Павлович

Вариационное исчисление

Редактор *Г.М. Звягина*
Корректор *Л.А. Петрова*
Компьютерная верстка: *Н.А. Андреева*
Подписано в печать 10.03.2017. Формат 60×84/16. Бумага документная.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 3,5. Тираж 100 экз. Заказ № 57
Балтийский государственный технический университет
Типография БГТУ
190005, С.-Петербург, 1-я Красноармейская ул., д. 1